Trilce
ACADEMIA

¡Tu mejor opción!

Solucionario

Examen UNI 2023-2

Matemática

Miércoles 16 de agosto

ÁLGEBRA

Pregunta 01

Indique el número de raíces de la siguiente ecuación:

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=\sqrt{3x-2}$$

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

Resolución 01

Ecuaciones irracionales

I. De la ecuación irracional, para calcular las soluciones reales, hacemos las restricciones:

$$\underbrace{\underbrace{x+2\geq 0}_{x\geq -2}}_{x\in[-2;+\infty\rangle} \quad \wedge \quad \underbrace{\underbrace{x-2\geq 0}_{x\geq 2}}_{x\in[2;+\infty\rangle} \quad \wedge \quad \underbrace{\underbrace{3x-2\geq 0}_{x\geq \frac{2}{3}}}_{x\in\left[\frac{2}{3};+\infty\right\rangle}$$

Intersecando se tiene que: $x \in [2;+\infty\rangle$

II. Resolviendo la ecuación irracional:

$$\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)^2=\left(\sqrt{3x-2}\right)^2$$
$$x+2+x-2+2.\sqrt{x^2-4}=3x-2$$
$$2.\sqrt{x^2-4}=x-2$$

Luego: $\underbrace{x-2\geq 0}_{x\geq 2} \quad \wedge \quad \left(2.\sqrt{x^2-4}\right)^2=(x-2)^2$

$$4(x^2-4)=x^2-4x+4$$
$$\underbrace{3x^2+4x-20}=0$$
$$(3x+10).(x-2)=0$$
$$x=\frac{-10}{3} \ \vee \ x=2$$

Como $x \geq 2$; entonces: C.S.= $\{2\}$

∴ El número de raíces reales de la ecuación es 1.

Rpta.: 1

Pregunta 02

En la siguiente ecuación:

$$\frac{x}{x+5}+\frac{5}{2\sqrt{x+5}}-\frac{6}{5}=0,$$

determine la suma de las raíces reales.

A) 0
B) $\frac{385}{2}$
C) $-\frac{385}{2}$
D) $\frac{385}{4}$
E) $-\frac{385}{4}$

Resolución 02

Ecuaciones irracionales

I. Hacemos las restricciones:

$$x+5>0 - x>-5$$
$$x\in\langle -5;+\infty\rangle$$

II. De la ecuación:

$$\frac{5}{2.\sqrt{x+5}}=\frac{6}{5}-\frac{x}{x+5}$$
$$\frac{5}{2\sqrt{x+5}}=\frac{x+30}{5.(x+5)}$$
$$\frac{25.\overbrace{(x+5)}^{\sqrt{x+5}^2}}{2.\sqrt{x+5}}=\underbrace{x+30}_{x+5+25}$$
$$25.\sqrt{x+5}=2(x+5)+(25).2$$
$$2.\sqrt{x+5}^2-25.\sqrt{x+5}+50=0$$
$$2.\sqrt{x+5} \qquad -5$$
$$\sqrt{x+5} \qquad -10$$
$$(2.\sqrt{x+5}-5).(\sqrt{x+5}-10)=0$$
$$x=\frac{5}{4} \quad \vee \quad x=95$$

Como $x>-5$; entonces:

$$\text{C.S.}=\left\{\frac{5}{4};95\right\}$$

Nos piden la suma de raíces reales:

$$\frac{5}{4}+95=\frac{385}{4}$$

Rpta.: $\frac{385}{4}$

Pregunta 03

Sean las matrices: $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 8\\ -3 & 1 & -2\end{bmatrix}$,

calcule Det(A . B).

A) –2
B) –1
C) 0
D) 1
E) 2

Resolución 03

Matrices y determinantes

Multiplicación de matrices:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix}1 & 0 & 8\\ -5 & 1 & -18\\ -10 & 3 & -14\end{bmatrix} = A\,.\,B \\ \begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix} & \\ \hline & \begin{bmatrix}1 & 0 & 8\\ -3 & 1 & -2\end{bmatrix} \end{array}$$

Luego, calculamos el determinante de: A . B

$$|AB| = \begin{vmatrix}1 & 0 & 8\\ -5 & 1 & -18\\ -10 & 3 & -14\end{vmatrix} = (-14+0-120)-(-80-54+0) = 0$$

$\therefore$ Det(A.B) = 0

Rpta.: 0

Pregunta 04

Dada la siguiente sucesión:

$$x_n = \frac{24n^2+2n+3\cos(n)}{3n^2}\ ;\ n = 1, 2, \ldots$$

Diga cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera.

A) x_n converge a 0.

B) x_n no es convergente.

C) x_n converge a $\frac{2}{3}$.

D) x_n converge a 8.

E) x_n converge a 1.

Resolución 04

Sucesiones

De la sucesión:

$$x_n = \frac{24n^2+2n+3\cos(n)}{3n^2}$$

$$x_n = \frac{24n^2}{3n^2}+\frac{2n}{3n^2}+\frac{3\cos(n)}{3n^2}$$

$$x_n = 8+\frac{2}{3n}+\frac{\cos(n)}{n^2}$$

Tomando límite:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(8+\frac{2}{3n}+\frac{\cos(n)}{n^2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} 8 + \lim_{n\to\infty}\frac{2}{3n} + \lim_{n\to\infty}\frac{\cos(n)}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 8+0+0 = 8$$

$\therefore$ x_n converge a 8

Rpta.: x_n converge a 8.

Pregunta 05

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, dada la siguiente serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log_2(n^{\alpha})}{n},$$

indique la proposición verdadera.

A) La serie diverge para cualquier valor de α.

B) La serie converge solamente para $\alpha = 0$.

C) La serie diverge solamente para $\alpha = 1$.

D) La serie diverge solamente para $\alpha < 1$.

E) La serie converge solamente para $\alpha = 1$.

Resolución 05

Series

Para el estudio del carácter de esta serie, analizaremos cuando $\alpha = 0$ y luego cuando $\alpha \neq 0$.

$\boxed{\text{Si } \alpha = 0}$ tenemos que:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\mathrm{Log}_2(n^{\alpha})}{n} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\mathrm{Log}_2(n^{\circ})}{n} = \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{Log}_2 1}{n}\right]$$

$$\rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{0}{n}\right) = 0$$

Entonces, si $\alpha = 0$, la serie es convergente y converge a cero.

$\boxed{\text{Si } \alpha \neq 0}$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\mathrm{Log}_2(n^{\alpha})}{n} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\alpha\,.\,\mathrm{Log}_2(n)}{n} = \alpha\,.\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\mathrm{Log}_2(n)}{n}$$

Luego, $\forall\ n \in \mathbb{Z}^+$: $n \geq 2$

Tomando el logaritmo en base "2": $\mathrm{Log}_2 n \geq 1$

Dividiendo en ambos miembros por "n":

$$\frac{\mathrm{Log}_2 n}{n} \geq \frac{1}{n} \longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\mathrm{Log}_2 n}{n} \geq \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Puesto que la serie: $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ es divergente, concluimos por el criterio de comparación directa que la serie: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\mathrm{Log}_2 n}{n}$ también es convergente.

Luego, si multiplicamos por una constante real no nula, el carácter de la serie no se altera, por consiguiente la serie:

$$\alpha.\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\mathrm{Log}_2 n}{n} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\mathrm{Log}_2 n^{\alpha}}{n}$$

También será divergente para $\alpha \neq 0$.

$\therefore$ La serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\mathrm{Log}_2 n^{\alpha}}{n}$ es convergente solamente para $\alpha = 0$.

Rpta.: La serie converge solamente para $\alpha = 0$.

Pregunta 06

Determine el número de soluciones enteras y positivas de la siguiente inecuación:

$$\frac{x^2-1}{5}+\frac{x+1}{2}<\frac{2x^2+3}{10}-\frac{x}{2}+3$$

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

Resolución 06

Inecuaciones polinomiales

De la inecuación polinomial, multiplicamos a todo por (10):

$$2(x^2-1)+5(x+1)<2x^2+3-5x+10(3)$$
$$10x<30$$
$$x<3$$

Luego, las únicas soluciones enteras y positivas son:

$$x=1 \text{ y } x=2$$

$\therefore$ La inecuación dada tiene únicamente 2 soluciones enteras y positivas.

Rpta.: 2

Pregunta 07

Resuelva en $\mathbb{R}$ la siguiente inecuación:

$$\frac{\sqrt{x-1}(x^2-4)(x^2+3x+9)}{(x^2-3x+9)(x^4-16)}>0$$

Indique el conjunto solución.

A) $\langle 1;+\infty\rangle-\{2\}$
B) $\langle 1;+\infty\rangle-\{4\}$
C) $\langle 1;+\infty\rangle$
D) $\mathbb{R}^+$
E) $\langle 4;+\infty\rangle$

Resolución 07

Inecuaciones

De la inecuación:

$$\frac{\sqrt{x-1}\,.\,(x^2-4)\,.\,(x^2+3x+9)}{(x^2-3\,.\,x+9)\,.\,(x^4-16)}>0$$

I. Hacemos la restricción para el radical:

$$x-1>0\rightarrow x>1$$

II. Luego, analizando los trinomios:

$$(x^2+3x-9) \text{ y } (x^2-3x+9),$$

siempre son positivos, pues su discriminante es negativo y coeficiente principal positivo.

Por lo tanto, lo simplificamos:

$$\rightarrow \frac{x^2-4}{x^4-16}>0 \rightarrow \frac{(x^2-4)}{(x^2+4)(x^2-4)}>0$$

$$\rightarrow x^2-4\neq 0$$

$$x\neq 2 \quad \wedge \quad x\neq -2 \quad \underbrace{\frac{1}{x^2+4}}_{x\in\mathbb{R}}>0$$

III. Al intersecar las restricciones, se tiene:

$$C.S.=\langle 1;+\infty\rangle-\{2\}$$

Rpta.: $\langle 1;+\infty\rangle-\{2\}$

Pregunta 08

Determine el dominio de la siguiente función:

$$f(x)=\ln\left(\sqrt{1-x^2}-3\right),$$

donde ln representa el logaritmo natural.

A) $\mathrm{Domf}=\mathbb{R}$
B) $\mathrm{Domf}=\varnothing$
C) $\mathrm{Domf}=[-1;1]$
D) $\mathrm{Domf}=\langle-\infty;-1]\cup[1;+\infty\rangle$
E) $\mathrm{Domf}=[1;+\infty\rangle$

Resolución 08

Funciones logarítmicas

De la función logarítmica:

$$f(x)=\mathrm{Ln}\,(\sqrt{1-x^2}-3)$$

Para el dominio:

$$\begin{array}{ccc} 1-x^2\geq 0 & \wedge & \sqrt{1-x^2}-3>0 \\ x^2-1\leq 0 & & \sqrt{1-x^2}>3 \\ (x+1)(x-1)\leq 0 & & 1-x^2>9 \\ C.S._1=[-1;1] & & x^2+8<0 \\ & & C.S._2=\varnothing \end{array}$$

Luego, $C.S._1\cap C.S._2=\varnothing$

$\therefore\ \mathrm{Dom}(f)=\varnothing$

Rpta.: Domf = $\varnothing$

Pregunta 09

Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$x+2y-2z=0$

$2x-y+\alpha z=0$

$3x+y-z=0$

Si este sistema de ecuaciones tiene soluciones no nulas, entonces, el valor de α pertenece al intervalo:

A) $\langle-\infty;-2\rangle$
B) $[-2;0\rangle$
C) $[0;2\rangle$
D) $[2;4\rangle$
E) $[4;+\infty\rangle$

Resolución 09

Sistema de ecuaciones lineales

En el sistema de ecuaciones lineales homogéneas, siempre se tiene al menos una solución llamada solución trivial (0;0;0).

Luego, en la condición del problema, el sistema tiene soluciones no nulas; entonces debe cumplir $\Delta s=0$, es decir:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & a \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow (1 + 6a - 4) - (6 + a - 4) = 0$$

$$a = 1$$

$\therefore$ Podemos afirmar que: $a = 1 \in [0;2\rangle$

Rpta.: [0;2⟩

Pregunta 10

Determine el valor máximo de la función objetivo $f(x;y) = 2x + 3y$ sujeta a la restricción:

$$R: \begin{cases} 2y \leq x + 2 \\ y - x \geq -1 \\ 0 \leq x \leq 4 \\ \quad y \geq 0 \end{cases}$$

A) 13
B) 14
C) 15
D) 16
E) 17

Resolución 10

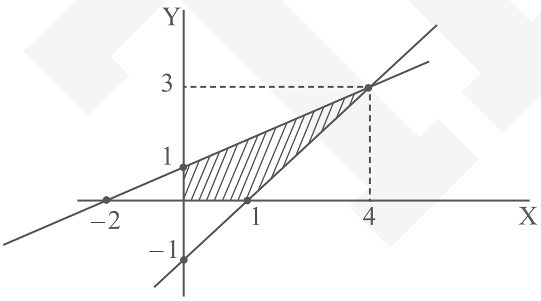
Programación lineal

Tenemos que maximizar:

$f(x;y) = 2 \, . \, x + 3 \, . \, y$

$$\text{Sujeto A:} \begin{cases} 2y \leq x + 2 \\ y - x \geq -1 \\ 0 \leq x \leq 4 \\ \quad y \geq 0 \end{cases}$$

Entonces, al graficar el conjunto de restricciones, obtenemos la siguiente región factible (convexa y acotada).



Evaluando los vértices en la función objetivo:

$(0;1) \longrightarrow f(0;1) = 3$

$(1;0) \longrightarrow f(1;0) = 2$

$(4;3) \longrightarrow f(4;3) = 17$

$(0;0) \longrightarrow f(0;0) = 0$

$\therefore$ El valor máximo de $f(x;y)$ es 17.

Rpta.: 17

ARITMÉTICA

Pregunta 11

Determine el mayor número entero tal que, al dividirlo entre 117, se obtiene por resto un número que es quíntuple del cociente.

A) 2806
B) 1540
C) 1200
D) 1612
E) 1950

Resolución 11

Cuatro operaciones

$$\begin{array}{l|l} N & 117 \\ \hline 5x & x \end{array} \qquad \Rightarrow 5x < 117$$

$$x < 23{,}4 \longrightarrow x_{máx} = 23$$

Algoritmo de la división:

$N = 117x + 5x = 122x$

$N_{máx} = 122(23) = 2806$

Rpta.: 2806

Pregunta 12

Si el costo de un kilogramo de platino puro es de 3500 soles, se desea fabricar un plato de 500 gramos usando platino y otro metal cuyo precio es despreciable. Si el precio de dicha aleación es de 700 soles, calcule la ley de dicha aleación.

A) 0,450
B) 0,300
C) 0,400
D) 0,100
E) 0,150

Resolución 12

Mezcla y aleación

Platino: 1 kg cuesta S/3500

1 g cuesta S/3,5

Otro metal: precio despreciable

$$\text{masa plato} = 500\text{ g} \begin{cases} m_{pt} = x \\ m_{metal} = 500 - x \end{cases}$$

Precio plato $= 3{,}5x = 700 \longrightarrow x = 200$

$$\therefore \text{Ley} = \frac{m_{pt}}{m_{plato}} = \frac{200}{500} = 0{,}400$$

Rpta.: 0,400

Pregunta 13

Se tiene una mezcla de agua con azúcar de concentración de 0,75 gramos/litro. Al agregar agua, se obtiene una mezcla de 1 litro con una concentración de 0,55 gramos/litro. Calcule la cantidad de agua (en litros) que se agregó.

A) 4/15
B) 3/15
C) 1/15
D) 2/15
E) 5/15

Resolución 13

Mezcla y aleación

Volumen	g/litro		Diferencias
$V_1=11k$	0,75		$0,55\approx 11$
		0,55	
$V_2=4k$	0		$0,20\approx 4$

Dato: $V_1+V_2=1 \rightarrow 15k=1 \rightarrow k=1/15$

Piden: $V_2=4(1/15)=4/15$

Rpta.: 4/15

Pregunta 14

En una proporción geométrica continua, los términos y la razón son números enteros positivos. La diferencia del primer antecedente con el doble del segundo antecedente es 30. Determine la menor diferencia positiva de los consecuentes.

A) 6
B) 7
C) 8
D) 9
E) 10

Resolución 14

Razones y proporciones

Sea la proporción: $\dfrac{mk^2}{mk}=\dfrac{mk}{m}=k\in Z$

Dato: $mk^2-2mk=30$

$$\underbrace{m}_{\substack{2\\10}}\underbrace{k}_{\substack{5\\3}}\underbrace{(k-2)}_{\substack{3\\1}}=30$$

$$\text{Piden: } (mk-m)_{mín} \begin{cases} 2\times 5-2=8 \text{ (mínimo)} \\ 10\times 3-10=20 \end{cases}$$

Rpta.: 8

Pregunta 15

Sophia impone un capital a una tasa de interés simple del 6% anual, recibiendo al cabo de 4 años un monto de 12 400 dólares. Calcule el valor del capital en dólares.

A) 1 000
B) 12 000
C) 5 000
D) 10 000
E) 14 000

Resolución 15

Regla de interés

Datos: $C=?$; $r\%=6\%$; $t=4$ años

$\Rightarrow I=C\times 6\%\times 4=24\%C$

$M=C+I=C+24\%C=124\%C$

Dato:

$M=12\,400=124\%C$

$C=10\,000$

Rpta.: 10 000

Pregunta 16

A partir de la siguiente tabla de frecuencias, determine la mediana.

I_i	f_i
[10;20⟩	20
[20;30⟩	40
[30;40⟩	2
[40;50]	2

A) 23
B) 22
C) 21
D) 25
E) 32

Resolución 16

Estadística

I_i	f_i	F_i
[10;20⟩	20	20
[20;30⟩	40	60
[30;40⟩	2	62
[40;50]	2	64
	$n=64$	

Como $\dfrac{n}{2}=\dfrac{64}{2}=32$

⟵ clase mediana

$$\boxed{Me=Linf+\omega\left(\dfrac{\frac{n}{2}-F_{i-1}}{f_i}\right)}$$

$$\Rightarrow Me=20+10\left(\dfrac{32-20}{40}\right)=23$$

Rpta.: 23

Pregunta 17

Una herencia (en dólares) se distribuye entre dos hermanos de tal forma que las cantidades que reciben forman una razón geométrica igual a 13/5 y una razón aritmética que es múltiplo de 80. Calcule el máximo valor (en dólares) de la herencia si se sabe que es inferior a 1000 dólares.

A) 540
B) 630
C) 720
D) 810
E) 900

Resolución 17

Divisibilidad

Cantidades que reciben los hermanos: A y B.

Dato: $\left.\frac{A}{B}=\frac{13\,k}{5\,k}\right\}$ herencia = 18k

Dato: $A-B=\overset{\circ}{80} \rightarrow 8k=\overset{\circ}{80}$

$k=\overset{\circ}{10}=10\,m$

$\Rightarrow$ Herencia$=18(10\,m)=180\,m<1000$

$\hookrightarrow$ máx$=5$

$\therefore$ Herencia$=180(5)=900$

Rpta.: 900

Pregunta 18

Sean a y b números enteros positivos tales que MCD(a,b)=36 y MCM(a,b)=504. Calcule la cantidad de pares ordenados (a,b) que cumplen con esta condición.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

Resolución 18

MCD y MCM

Como MCD(a,b)=36

$\left.\begin{aligned}(*)\ a&=36p\\ (*)\ b&=36q\end{aligned}\right\}$ p y q son Pesi

Dato:

MCM(a,b)=504

$36pq=504 \rightarrow p\,q=14$

$\left.\begin{array}{cc}1 & 14\\ 2 & 7\\ 7 & 2\\ 14 & 1\end{array}\right\}$ 4 soluciones

Rpta.: 4

Pregunta 19

Las notas de un grupo de alumnos se presentan en la siguiente tabla de frecuencias.

Nota	f_i
05	3
10	
15	15
20	

Si la nota media fue 13 y hay 30 alumnos, ¿cuántos alumnos tienen nota mayor o igual a 15?

A) 13
B) 15
C) 18
D) 20
E) 21

Resolución 19

Estadística

Nota	f_i	x_if_i
05	3	15
10	12 – a	120 – 10a
15	15	225
20	a	20a
	n = 30	360 + 10a

Dato: $\bar{x}=13 \rightarrow \frac{360+10a}{30}=13$

$360+10a=390$

$a=3$

El número de personas con notas mayor o igual a 15 es:

$15+a=15+3=18$

Rpta.: 18

Pregunta 20

A es directamente proporcional a B y, en forma independiente, B es directamente proporcional a C. Cuando A=2, el valor de C=6. Determine la suma de las cifras de A cuando C=36.

A) 3
B) 4
C) 2
D) 5
E) 6

Resolución 20

Magnitudes Proporcionales

Dato: A DP B $\wedge$ B DP C $\rightarrow$ A DP C $\rightarrow$ $\boxed{\frac{A}{C}=k}$

A	2	a
C	6	36

$\frac{2}{6}=\frac{a}{36}\rightarrow a=12$

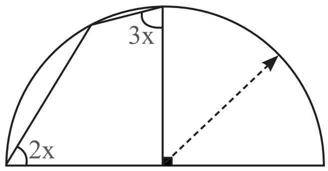
Piden: Σcif $a=1+2=3$

Rpta.: 3

GEOMETRÍA

Pregunta 21

En la figura, calcule el valor de "x" (en grados sexagesimales).

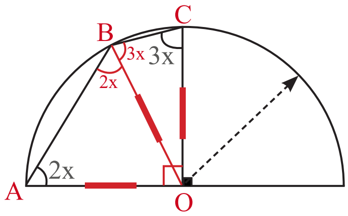


A) 27
B) 36
C) 25
D) 30
E) 20

Resolución 21

Circunferencia

En el cuadrilátero ABCO:



$$2x + 5x + 3x + 90° = 360°$$

$$\boxed{x = 27°}$$

Rpta.: 27

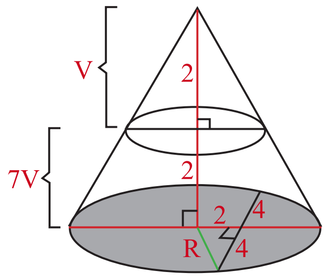
Pregunta 22

Una cuerda trazada en la base de un cono circular recto de 4 m de altura mide 8 m y la distancia de la cuerda al centro del círculo es 2 m; luego, a 2 m de la base se traza un plano paralelo a dicha base, obteniéndose un tronco de cono. Calcule el volumen (en m^3) del tronco de cono.

A) $\frac{20}{3}\pi$
B) $\frac{35}{3}\pi$
C) $\frac{40}{3}\pi$
D) $\frac{70}{3}\pi$
E) $\frac{71}{3}\pi$

Resolución 22

Cono



Piden: 7V

Calculando R:

$R^2 = 2^2 + 4^2$

$R = 2\sqrt{5}$

$8V = \frac{1}{3}\pi(2\sqrt{5})^2 . 4$

$V = \frac{10}{3}\pi$

$7V = \frac{70}{3}\pi$

Rpta.: $\frac{70}{3}\pi$

Pregunta 23

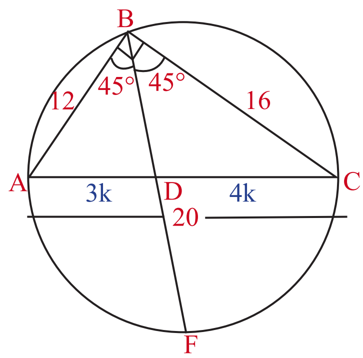
En un triángulo ABC inscrito en una circunferencia, se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$ tal que su prolongación interseca en *F* a la circunferencia.

Si AB = 12u, BC = 16u y AC = 20u, entonces (BD)(DF) es (en u^2):

A) $\frac{4800}{49}$
B) $\frac{4805}{49}$
C) $\frac{4810}{49}$
D) $\frac{4815}{49}$
E) $\frac{4820}{49}$

Resolución 23

Relaciones métricas en la circunferencia



El triángulo ABC es rectángulo, por proporcionalidad:

AD = 3k

DC = 4k

Teorema de cuerdas:

(BD)(DF) = 3k . 4k = 12 k^2 ... (1)

Del gráfico: 3k + 4k = 20

k = 20/7

En (1):

$$\boxed{(BD)(DF) = \frac{4800}{49}}$$

Rpta.: $\frac{4800}{49}$

Pregunta 24

En un triángulo ABC recto en B, el punto N pertenece a la hipotenusa. Si AN = AB y CN = NB, calcule la medida del ángulo BAC (en grados sexagesimales).

A) 60

B) 75

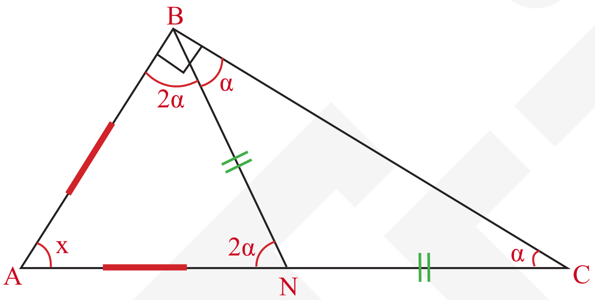
C) 53

D) 45

E) 37

Resolución 24

Triángulos



Del gráfico:

$3\alpha = 90°$

$\alpha = 30°$

⊿ ABC:

x + 30° = 90°

$\boxed{x = 60°}$

Rpta.: 60

Pregunta 25

Una recta *L* está contenida en el plano *P* y separa a este plano en dos semiplanos π_1 y π_2.

Indique el valor de verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:

I. Semiplano π_1 ∪ semiplano π_2 = plano *P*.

II. Semiplano π_1 ∩ semiplano π_2 = recta *L*.

III. Semiplano π_1 ∪ recta *L* ∪ semiplano π_2 = plano *P*.

A) VVV

B) VFV

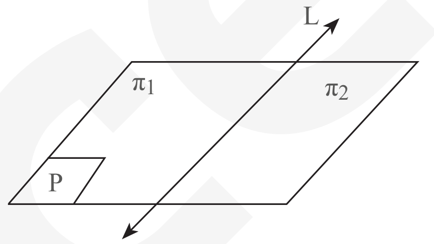
C) VVF

D) FFV

E) FFF

Resolución 25

Rectas y planos



I. Semiplano π_1 ∪ semiplano π_2 = ▱ *P*. (F)

II. Semiplano π_1 ∩ semiplano π_2 = *L*. (F)

III. Semiplano π_1 ∪ $\overleftrightarrow{L}$ ∪ semiplano π_2 = ▱ *P*. (V)

Rpta.: FFV

Pregunta 26

En un tronco de prisma triangular recto ABC–DEF, las aristas laterales $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ son perpendiculares a la base ABC y miden 8 m, 4 m y 6 m respectivamente. Si el área de la región cuadrangular BEFC es 30 m^2 y la distancia del vértice *A* a la arista $\overline{BC}$ es 5 m. Calcule (en m^3) el volumen del tronco de prisma recto.

A) 75

B) 81

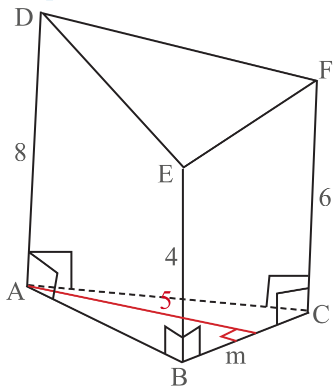
C) 84

D) 87

E) 90

Resolución 26

Prisma - Tronco de prisma



Piden: V_T

Dato: $A_{\square BEFC} = 30$

$$\frac{(6+4)}{2}m = 30$$

$$m = 6$$

$$V_T = A_{\triangle ABC}\left(\frac{8+4+6}{3}\right)$$

$$= \frac{5.6}{2}.6$$

$V_T = 90$

Rpta.: 90

Pregunta 27

En un recipiente que tiene la forma de un cilindro recto de base circular, se introduce un bloque de hielo en forma de un cubo de modo que sus vértices se ubican en las circunferencias de las bases. Si la arista del cubo mide 1 cm, calcular el volumen (en cm^3) del líquido necesario para llenar el recipiente luego de que se derrita totalmente el bloque de hielo.

A) $\frac{\pi - 3}{3}$

B) $\frac{\pi - 2}{3}$

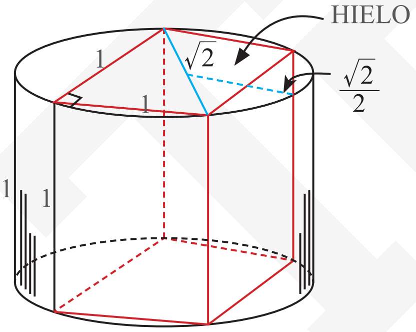
C) $\frac{\pi - 3}{2}$

D) $\frac{\pi - 2}{2}$

E) $\frac{\pi + 1}{2}$

Resolución 27

Cilindro



Piden: $V_{\text{LÍQUIDO NECESARIO}}$

$V_{\text{LÍQUIDO NECESARIO}} = V_{CIL} - V_{HIELO}$

$$= \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2.1 - 1^3$$

$$= \frac{\pi - 2}{2}$$

Rpta.: $\frac{\pi - 2}{2}$

Pregunta 28

En un polígono convexo equiángulo ABCDEF. Si AB = 8 m, CD = 6 m y DE = 10 m, calcule (en m) BF.

A) $8\sqrt{3}$

B) $6\sqrt{3}$

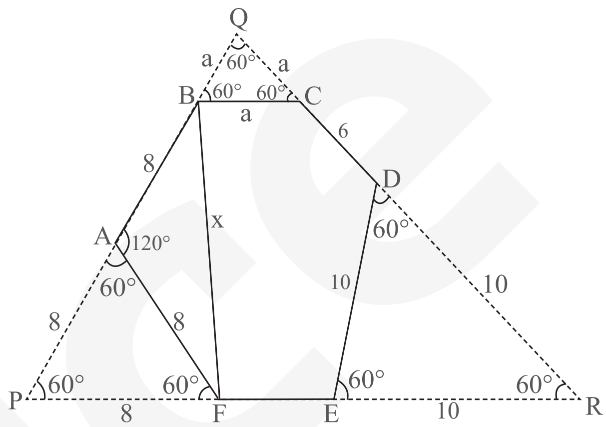
C) $9\sqrt{3}$

D) $2\sqrt{3}$

E) $4\sqrt{3}$

Resolución 28

Polígonos



* Por ser ABCDEF polígono equiángulo:

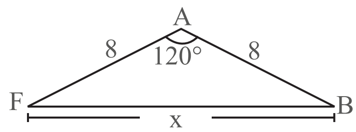
$\rightarrow m\measuredangle ext = \frac{360°}{6}$

$m\measuredangle ext = 60°$

* $\triangle$ PAF, $\triangle$ BQC, $\triangle$ EDR y $\triangle$ PQR son equiláteros:

$\rightarrow$ QR = PQ = PR = 16 + a

• Luego en el $\triangle$ ABF isósceles:



$$\boxed{\therefore\ x = 8\sqrt{3}}$$

Rpta.: $8\sqrt{3}$

Pregunta 29

Indique el valor de verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:

I. En todo triángulo equilátero, el baricentro, el incentro, el ortocentro y el circuncentro son el mismo punto.

II. En todo triángulo isósceles, el baricentro, el incentro, el ortocentro y el circuncentro se encuentran en la misma recta.

III. En todo triángulo rectángulo, el baricentro, ortocentro y circuncentro se encuentran en la misma recta.

A) VVV

B) VVF

C) VFF

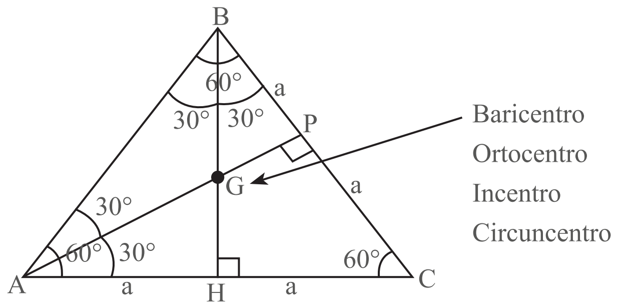
D) FFF

E) FFV

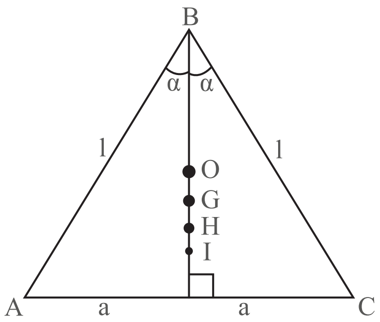
Resolución 29

Puntos notables

I. VERDADERO

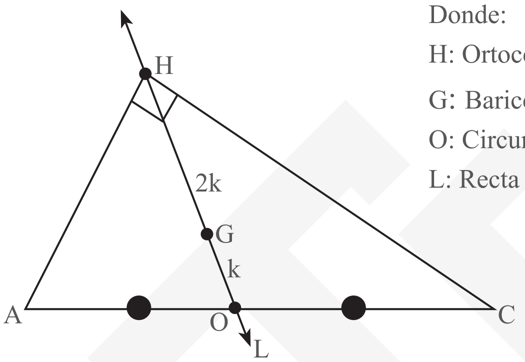


II. VERDADERO



Donde:
O: Circuncentro
G: Baricentro
H: Ortocentro
I: Incentro

III. VERDADERO

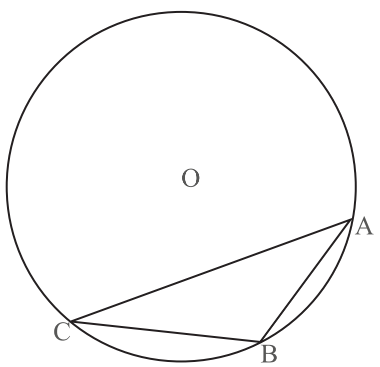


Donde:
H: Ortocentro
G: Baricentro
O: Circuncentro
L: Recta de Euler

Rpta.: VVV

Pregunta 30

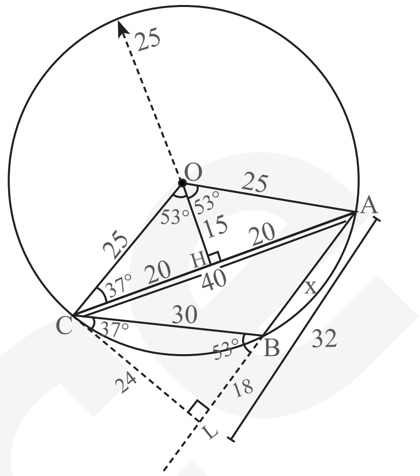
En la figura, el triángulo ABC está inscrito en la circunferencia de centro O y cuyo radio mide 25 m. Si AC = 40 m y BC = 30 m, calcule (en m) AB.



A) 13
B) 14
C) 15
D) 16
E) 10

Resolución 30

Circunferencia



Se observa: m$\sphericalangle$COA = 106°

Luego por ángulo exinscrito: m$\sphericalangle$ LBC = 53° = $\dfrac{m\overset{\frown}{AC}}{2}$

Además: ◺ LCA es notable de 37° y 53°

$\rightarrow$ x + 18 = 32

$\therefore$ x = 14

Rpta.: 14

Pregunta 31

Dada la función f, definida por f(x) = 8vers(x) − 3, tal que:

$$x \in \left[\frac{\pi}{3};\frac{7\pi}{6}\right]$$

determine el rango de la función f.

A) [1;5]
B) [1;10]
C) [1;13]
D) [1;15]
E) [1;17]

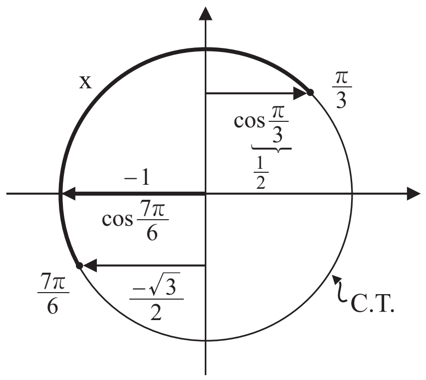
Resolución 31

Funciones trigonométricas directas

$f(x) = 8(1 - \cos x) - 3$

$f(x) = 5 - 8\cos x;\ x \in \left[\frac{\pi}{3};\frac{7\pi}{6}\right]$

Sabemos: $\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6}$ en la C.T.



Del gráfico:

$-1 \leqslant \cos x \leqslant \frac{1}{2}$

formando f(x):

$1 \leqslant \underbrace{5-8\cos x}_{f(x)} \leqslant 13$

Ranf = [1;13]

Rpta.: [1;13]

Pregunta 32

Sea la función f, definida por:

$$f(x) = \tan(x) + 3|\cot(x)|,\ \forall\ x \in \left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle,$$

calcule el valor mínimo de la función f.

A) $\sqrt{6}$
B) $\sqrt{3}$
C) $2\sqrt{6}$
D) $2\sqrt{3}$
E) $3\sqrt{3}$

Resolución 32

Funciones trigonométricas directas

$x \in \left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle \rightarrow |\cot x| = \cot x;\ \cot x > 0$

$\tan x > 0$

f(x) = tanx + 3cotx

Considerar: $\boxed{\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}}$

$\frac{\tan x + 3\cot x}{2} \geqslant \sqrt{\tan x\,(3\cot x)}$

1

$f(x) \geqslant 2\sqrt{3}$

$\text{fmin} = 2\sqrt{3}$

Rpta.: $2\sqrt{3}$

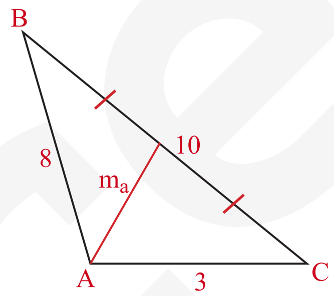
Pregunta 33

Sea ABC un triángulo con: AB = 8 u, BC = 10 u, AC = 3 u y m_a es la mediana relativa al lado BC, calcule el valor de $4(m_a)^2$ en u^2.

A) 26
B) 36
C) 46
D) 56
E) 66

Resolución 33

Relaciones métricas en triángulo oblicuángulos



Teorema de la mediana:

$8^2 + 3^2 = 2\,m_a^2 + \frac{10}{2}^2$

$73 = 2ma^2 + 50$

$\frac{23}{2} = ma^2$

$4ma^2 = 4\left(\frac{23}{2}\right)$

$4(ma)^2 = 46$

Rpta.: 46

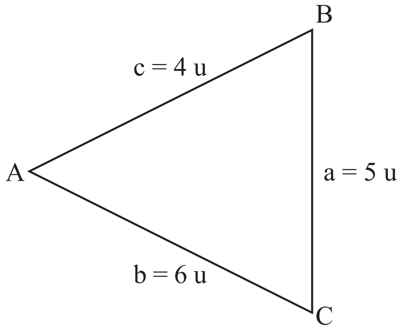
Pregunta 34

En un triángulo ABC, AB = 4 u, BC = 5 u y AC = 6 u. Calcule el valor de la expresión: $E = \sqrt{7}\left[\tan\left(\frac{A}{2}\right) + \tan\left(\frac{B}{2}\right)\right]$

A) $\frac{52}{15}$
B) $\frac{53}{15}$
C) $\frac{54}{15}$
D) $\frac{55}{15}$
E) $\frac{56}{15}$

Resolución 34

Resolución de triángulos oblicuángulos



$$p=\frac{a+b+c}{2}$$

$$p=\frac{15}{2}\text{ u}$$

- $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-b)}{p(p-a)}}\to\tan\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{7}}{5}$
- $\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}\to\tan\frac{B}{2}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

Piden:

$$L=\sqrt{7}\left[\frac{\sqrt{7}}{5}+\frac{\sqrt{7}}{3}\right]$$

$$L=\frac{56}{15}$$

Rpta.: $\frac{56}{15}$

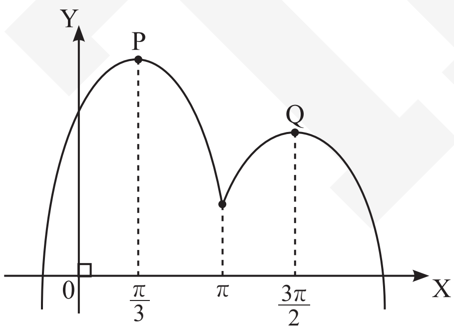
Pregunta 35

Sea la función f continua y definida por intervalos, tal que:

$$f(x)=\begin{cases}A\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}+\phi\right); & x<\pi\\ B\cos\left(\frac{x}{3}+\theta\right); & x>\pi\\ 1; & x=\pi\end{cases}$$

Donde A, B son números reales y ϕ,θ son ángulos que cumplen $-\pi<\theta<0<\phi<\pi$

La gráfica de la función es:



Siendo **P** y **Q** puntos de máxima ordenada,

calcule el valor de $A\cdot B\cdot\cos(\phi+\theta)$.

A) 2

B) $2\sqrt{3}$

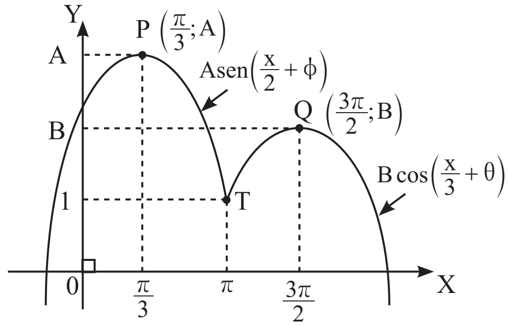
C) $-2\sqrt{3}$

D) -4

E) $\sqrt{3}$

Resolución 35

Funciones trigonométricas directas



De P: $A=A\operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{3}}{2}+\phi\right)\to 1=\operatorname{sen}\left(\underbrace{\frac{\pi}{6}+\phi}_{\frac{\pi}{2}}\right)\to\phi=\frac{\pi}{3}$

De Q: $B=B\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2}}{3}+\theta\right)\to 1=\cos\left(\underbrace{\frac{\pi}{2}+\theta}_{0}\right)\to\theta=-\frac{\pi}{2}$

De T:
- $1=A\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\to A=2$
- $1=B\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{-\pi}{2}\right)\to B=\frac{2}{\sqrt{3}}$

Piden:

$$A.B.\cos(\phi+\theta)=2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{-\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)$$

$$A.B.\cos(\phi+\theta)=2$$

Rpta.: 2

Pregunta 36

Calcule el valor de: arccos(cos(3)) + arcsen(sen(2))

A) $3-\pi$

B) $\pi+1$

C) $3\pi-2$

D) $2\pi-3$

E) $2\pi-1$

Resolución 36

Funciones trigonométricas inversas

Piden:

M = arccos(cos3) + arcsen(sen2)

- $\arccos(\cos 3)=3;\ 3\in[0,\pi]$
- $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}2)\neq 2;\ 2\in\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}2)=\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(\pi-2))=\pi-2;\ \pi-2\in\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Piden:

$M = 3 + \pi - 2$

$M = \pi + 1$

Rpta.: $\pi + 1$

Pregunta 37

Calcule el valor de K:

$$K = \frac{\text{sen}(323°).\sec(300°).\tan(240°)}{\cos(307°).\tan(315°).\sec(600°).\tan(60°)}$$

A) 1

B) -1

C) -2

D) 2

E) 0

Resolución 37

Reducción al primer cuadrante

- $\text{sen}323° = \text{sen}(360° - 37°) = -\text{sen}37°$
- $\sec300° = \sec(360° - 60°) = +\sec60°$
- $\tan240° = \tan(180° + 60°) = +\tan60°$
- $\cos307° = \cos(360° - 53°) = +\cos53°$
- $\tan315° = \tan(360° - 45°) = -\tan45°$
- $\sec600° = \sec(360° + 240°) = \sec240° = \sec(180° + 60°) = -\sec60°$

En K:

$$K = \frac{(-\text{sen}37°)(+\sec60°)(+\tan60°)}{(+\cos53°)(-\tan45°)(-\sec60°)(\tan60°)}$$

$$K = \frac{-\left(\frac{3}{5}\right)}{\left(\frac{3}{5}\right)(1)}$$

$K = -1$

Rpta.: -1

Pregunta 38

En un cuadrilátero inscriptible ABCD de lados AB = a, BC = b, CD = c y DA = d, en unidades (u), determine la expresión equivalente a M en términos de los lados del cuadrilátero, siendo:

$$M = \frac{\text{sen}(B)}{\text{sen}(A)}$$

A) $\frac{ac + bd}{ab + cd}$

B) $\frac{ad + bc}{ab + cd}$

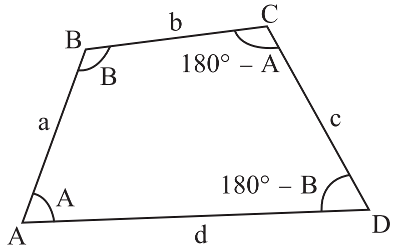
C) $\frac{ac + bd}{ad + bc}$

D) $\frac{ad + bc}{abcd}$

E) $\frac{ab + cd}{ad + bc}$

Resolución 38

Resolución de triángulos oblicuángulos



- Área ABCD $= \frac{ab}{2}\text{sen}B + \frac{cd}{2}\text{sen}(180° - B)$

  Área ABCD $= \text{sen}B\left(\frac{ab + cd}{2}\right)$...(I)

- Área ABCD $= \frac{ad}{2}\text{sen}A + \frac{bc}{2}\text{sen}(180° - A)$

  Área ABCD $= \text{sen}A\left(\frac{ad + bc}{2}\right)$...(II)

(I) = (II)

$$\text{sen}B\left(\frac{ab + cd}{2}\right) = \text{sen}A\left(\frac{ad + bc}{2}\right)$$

$$\frac{\text{sen}B}{\text{sen}A} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$$

Rpta.: $\frac{ad + bc}{ab + cd}$

Pregunta 39

Sea ABC un triángulo acutángulo, que satisface las condiciones:

$\text{sen}(A) + \text{sen}(C) = 2\text{sen}(B)$ y $\cos(A) = \frac{1}{8}$,

calcule el valor de: $\frac{\text{sen}(A)}{\text{sen}(C)}$

A) $\frac{4}{3}$

B) $\frac{3}{2}$

C) $\frac{7}{5}$

D) $\frac{9}{5}$

E) $\frac{5}{4}$

Resolución 39

Resolución de triángulos oblicuángulos

Del dato:

$2R\text{sen}A + 2R\text{sen}C = 2(2R\text{sen}B)$

$a + c = 2b$...(I)

Del teorema de cosenos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

de (I)

$(2b - c)^2 = b^2 + c^2 - 2bc\left(\frac{1}{8}\right)$

$4b^2 - 4bc + c^2 = b^2 + c^2 - \frac{bc}{4}$

$3b^2 = \frac{15bc}{4}$

$\frac{b}{c} = \frac{5}{4} \rightarrow \begin{matrix} b = 5k \\ c = 4k \end{matrix} \ldots \text{(II)}$

Piden:

$\frac{\text{senA}}{\text{senC}} = \frac{2\text{RsenA}}{2\text{RsenC}} = \frac{a}{c} \ldots$ de (I)

$\frac{\text{senA}}{\text{senC}} = \frac{2b - c}{c} \ldots$ de (II)

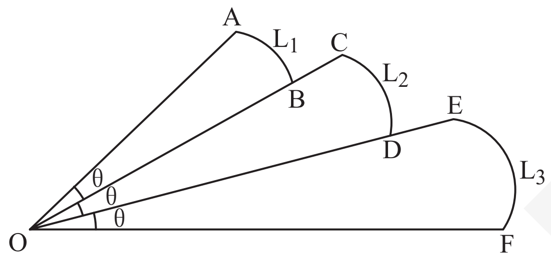
$\frac{\text{senA}}{\text{senC}} = \frac{3}{2}$

Rpta.: $\frac{3}{2}$

Pregunta 40

En la figura mostrada, el punto O es el centro de los sectores circulares AOB, COD y EOF, OA = R, BC = DE = r, y las longitudes de los arcos son $L_1 = 6r$, $L_3 = 10r$.

Calcule el valor de la medida del ángulo θ en radianes.



A) 1

B) $\frac{3}{2}$

C) 2

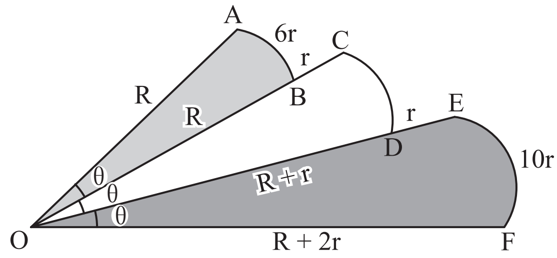
D) $\frac{5}{2}$

E) 3

Resolución 40

Longitud de arco

Ubicando los datos:



En AOB: $6r = \theta R \ldots$ (I)

En EOF: $10r = \theta(R+2r)$ Operando de (I)

$10r = \theta R + 2r\theta$

$10r = 6r + 2r\theta$

$4r = 2r\theta$

$2 = \theta$

Rpta.: 2