Pregunta 01

En una urna se tienen fichas idénticas y en cada una de ellas está escrito un número de 3 cifras del sistema de base 3. La urna contiene a todos los números de 3 cifras del sistema ternario, sea $\in$: el experimento aleatorio que consiste en extraer aleatoriamente una ficha de urna y X: la variable aleatoria discreta asociada definida como la suma de cifras del número seleccionado. Halle la esperanza matemática de la variable aleatoria X.

A) 3,2
B) 3,3
C) 3,4
D) 3,5
E) 3,6

Resolución 01

Probabilidades

Esperanza matemática

Hallando los elementos del espacio muestral según la suma de sus cifras

- Suma 1: $100_{(3)}$
- Suma 2: $101_{(3)}$; $110_{(3)}$; $200_{(3)}$
- Suma 3: $111_{(3)}$; $210_{(3)}$; $201_{(3)}$; $120_{(3)}$; $102_{(3)}$
- Suma 4: $112_{(3)}$; $121_{(3)}$; $211_{(3)}$; $220_{(3)}$; $202_{(3)}$
- Suma 5: $122_{(3)}$; $212_{(3)}$; $221_{(3)}$
- Suma 6: $222_{(3)}$

$\Rightarrow n(\Omega)=18$

x: la suma de cifras del número.

x	1	2	3	4	5	6
P(x)	1/18	3/18	5/18	5/18	3/18	1/18

$E(x)=\Sigma x_i \times P_{(x_i)}$

$$E_{(x)}=\frac{1\times1+2\times3+3\times5+4\times5+5\times3+6\times1}{18}$$

$$E_{(x)}=\frac{63}{18}=3,5$$

Rpta.: 3,5

Pregunta 02

Se tiene $\overline{abc}_{(9)}=\overline{cba}_{(7)}$. Exprese el número en base 10. Dé como respuesta la suma de las cifras de dicho número.

A) 10
B) 12
C) 14
D) 16
E) 18

Resolución 02

Numeración

Cambio de base

$$\overline{abc}_{(9)}=\overline{cba}_{(7)}$$

Descomponemos polinómicamente

$81a+9b+c=49c+7b+a$

$\cancel{80}a+\cancel{2}b=\cancel{48}c$

$$\begin{array}{ccc} 40a & +\ b & =24c \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 0 & 5 \end{array}$$

Luego:

$305_{(9)}$ a base 10

$3\times9^2+5$

$243+5$

248

$\therefore \Sigma_{\text{cifras}}=2+4+8=14$

Rpta.: 14

Pregunta 03

Se sabe que $\overline{abcd}$ es igual al producto de tres números pares consecutivos y además $4(\overline{ab})=5(\overline{cd})$.

Calcule el valor de $\overline{abcd}$ más 1936.

A) 5962
B) 5964
C) 5966
D) 5968
E) 5970

Resolución 03

Numeración

Numeración decimal

$\overline{abcd}=100\times\overline{ab}+\overline{cd}$

Si: $\dfrac{\overline{ab}}{5}=\dfrac{\overline{cd}}{4}=k$

$\overline{abcd}=100(5k)+4k$

$\overline{abcd}=504k$

Producto de 3 #s pares consecutivos $= 2\times2\times2\times3\times3\times7k$

$14\times16\times18 = 2\times2\times2\times3\times3\times7k$

$\therefore k=8$

$\overline{ab}=5\times8=40$

$\overline{cd}=4\times8=32$

$\overline{abcd}=4032$

$\overline{abcd}+1936=5968$

Rpta.: 5968

Pregunta 04

Determine el conjunto de valores de n ($n \in \mathbb{N}$) de tal modo que la expresión

$$E(n)= (2n + 1)(3n + 2)$$

sea divisible por 6.

A) $\{6t - 1 / t \in \mathbb{N}\}$
B) $\{6t - 2 / t \in \mathbb{N}\}$
C) $\{6t - 3 / t \in \mathbb{N}\}$
D) $\{6t - 4 / t \in \mathbb{N}\}$
E) $\{6t - 5 / t \in \mathbb{N}\}$

Resolución 04

Divisibilidad

Principios de divisibilidad

$E(n)=(2n+1)(3n+2)\ ;\ n\in\mathbb{N}$

Como $E(n)=\overset{\circ}{6}$

$\Rightarrow (2n+1)(3n+2)=\overset{\circ}{6}$

$\underbrace{6n^2}_{\overset{\circ}{6}}+7n+2=\overset{\circ}{6}$

$7n+2=\overset{\circ}{6}$

$n+2=\overset{\circ}{6}$

$n=\overset{\circ}{6}-2$

$\therefore\ n=\{6t-2/t\in\mathbb{N}\}$

Rpta.: $\{6t-2/t\in\mathbb{N}\}$

Pregunta 05

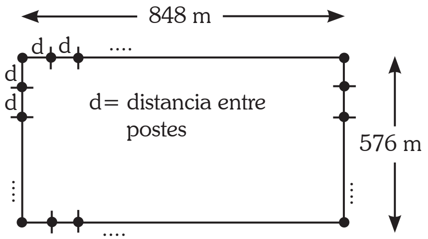
Se tiene que cercar con alambre un terreno rectangular cuyas dimensiones son 576 m y 848 m. Si los postes de soporte se colocarán equidistantes, la equidistancia deberá ser un número entero de metros y el número de postes el menor posible. ¿Cuántos postes serán necesarios?

A) 178
B) 184
C) 188
D) 204
E) 208

Resolución 05

MCD - MCM

Aplicaciones



Para que el N.° de postes sea mínimo

$\Rightarrow d = MCD(576, 848)$

$d = 16$ m

$$N.° \text{ postes} = \frac{\text{perímetro}}{d}$$

$$N.° \text{ postes} = \frac{2(848+576)}{16}$$

$$= 178$$

Rpta.: 178

Pregunta 06

Dadas las siguientes proposiciones

I. El producto de dos fracciones propias positivas es una función propia.

II. La suma de dos fracciones propias positivas es también propia.

III. $\forall\, n \in N, n > 1: \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$ se convierte en un decimal periódico mixto.

Señale la alternativa que presenta la secuencia correcta, después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

A) FFF
B) FVF
C) VFF
D) VFV
E) VVV

Resolución 06

Números racionales

Principios teóricos y básicos

I. Sean f_1 y f_2 propias positivas, entonces

$$\left.\begin{array}{l} 0<f_1<1 \\ 0<f_2<1 \end{array}\right\} \otimes$$
$$0<f_1f_2<1 \ \ldots \text{(V)}$$

II. Sean f_1 y f_2 propias positivas, entonces

$$\left.\begin{array}{l} 0<f_1<1 \\ 0<f_2<1 \end{array}\right\} \oplus$$
$$0<\underbrace{f_1+f_2}_{\text{No es necesariamente propia ... (F)}}<2$$

III. $\forall n \in N$; $n>1$; sea

$$E_{(n)} = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$

$$E_{(n)} = \frac{3n^2-1}{(n-1)n(n+1)} = \frac{A}{B}$$

Notamos que A no es $\overset{\circ}{3}$ y que B es $\overset{\circ}{6}$.

i. si "n" es par, entonces A es impar y como A es no $\overset{\circ}{3}$, en el denominador se mantiene el factor 6, con lo cual se genera un decimal periódico mixto.

ii. Si "n" es impar, entonces A es $\overset{\circ}{4}+2$ y B es $\overset{\circ}{4}$, entonces el denominador conserva un factor 2 y como A no es $\overset{\circ}{3}$, el denominador conserva un factor 3, con lo cual se genera un decimal periódico mixto... (V)

Rpta.: VFV

Pregunta 07   *7*

Si los siguientes números son cuadrados perfectos: $\overline{aabb}$, $\overline{1ccc}$ y al multiplicar sus raíces cuadradas con $\overline{x0y}$ se obtiene un cuadrado perfecto, calcule (x + y), sabiendo que $\overline{aabb}$ y $\overline{1ccc}$ son múltiplos de cuatro.

A) 10
B) 11
C) 12
D) 14
E) 15

Resolución 07

Potenciación

Cuadrados perfectos

$$\overset{-+-+}{\overline{aabb}} = \left\langle \begin{matrix} \overset{\circ}{11} \\ \overset{\circ}{4} \end{matrix} \right\rangle \overline{aabb} = \overset{\circ}{44} = k^2 \rightarrow \overline{aabb}=88^2$$

$$7744=88^2$$

$$\overline{1ccc}=\overset{\circ}{4}$$

$$\left.\overline{1ccc}=Q^2\ \right\rangle \overline{1ccc}=1444=38^2$$

Además: $88\times38\times\overline{x0y}=R^2$

$$(2^3\times11)(2\times19)\times\overline{x0y}=R^2$$

$$2^4\times11\times19\times\overline{x0y}=R^2$$

$$\therefore\ \overline{x0y}=11\times19=209 \rightarrow x+y=2+9=11$$

Rpta.: 11

Pregunta 08

Sea la expresión

$E(n) = n(n+1)(n+2)(n+3)+1$, con $n \in \mathbb{N}$.

Si $n_1, n_2, n_3,\ldots$ son todos los números naturales tales que $E(n_k)$ es divisible por 5 para todo k, ordenados de manera que $1\leq n_1<n_2<n_3<\ldots$, entonces el valor de $n_1+n_2+n_3$ es

A) 12
B) 14
C) 16
D) 18
E) 20

Resolución 08

Divisibilidad

Principio de divisibilidad

$$E_{(n)}=n(n+1)(n+2)(n+3)+1$$

$$E_{(n)}=n(n+3)(n+1)(n+2)+1$$

$$E_{(n)}=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1$$

$$E_{(n)}=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1$$

$$E_{(n)}=(n^2+3n+1)^2$$

$$E_{(n_k)}=(n_k^2+3n_k+1)^2=\overset{\circ}{5}$$

$$n_k^2+3n_k+1=\overset{\circ}{5}$$

$$n_k^2+3n_k+1-5n_k=\overset{\circ}{5}-5n_k$$

$$n_k^2-2n_k+1=\overset{\circ}{5}$$

$$(n_k-1)^2=\overset{\circ}{5}$$

$$n_k-1=\overset{\circ}{5}$$

$$n_k=\overset{\circ}{5}+1 \begin{cases} n_1=1 \\ n_2=6 \\ n_3=11 \end{cases}$$

$$\therefore\ n_1+n_2+n_3=18$$

Rpta.: 18

Pregunta 09

Sea $[a_{ij}]_{4x4}$ con $a_{ij}=\text{mín}\{i, j\}$. Determine $|A|$.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

Resolución 09

Matrices

Determinantes

$$[Aij]_{4x4}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Como $Aij = \min\{i\,;\,j\}$

$$\Rightarrow [Aij]_{4x4}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&2&3&3\\1&2&3&4\end{pmatrix}$$

Nos piden calcular $|A|$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&2&3&3\\1&2&3&4\end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix}f_4 - f_3\\ f_3 - f_2\\ f_2 - f_1\\ \longrightarrow\end{matrix}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1$$

Rpta.: 1

Pregunta 10

Dada una función lineal f(x, y), donde $(x, y)\in R$ siendo R una región acotada y cerrada de $\mathbb{R}^2$, se pide maximizar f(x, y) en R. Si adicionamos una inecuación más a las restricciones del problema, sea esta $ax + by + c > 0$. Señale la alternativa que presenta la secuencia correcta, después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F):

I. La solución del problema no cambia si la nueva restricción (inecuación) genera un semiplano que contiene R.

II. La solución del problema no existe si el semiplano que genera la nueva restricción no interseca a R.

III. La solución del problema existe si la recta $ax + by + c = 0$ corta a R.

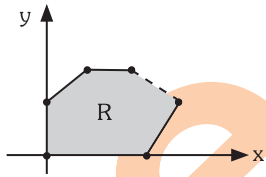
A) VVV
B) VFV
C) VFF
D) FVV
E) FFF

Resolución 10

Programación lineal

Región factible

Sea R una región acotada



Se pide maximizar f(x;y) en R. Si adicionamos una inecuación más a las restricciones del problema.

Sea: P_1:$ax+by+c>0$ un semiplano.

I. VERDADERO

La solución no cambia si la nueva restricción contiene a R, es decir

$$R\cap P_1= R$$

II. VERDADERO

La solución no existe si

$$R\cap P_1= \varnothing$$

III. VERDADERO

Existe solución si

$$L_1\text{: } ax+by+c=0$$
$$L_1\cap R\neq \varnothing$$

Rpta.: VVV

Pregunta 11

Una marca de producto de limpieza usada para obtener una solución es 25% ácida. Otra marca de producto de limpieza es 50% ácida. ¿Cuántos galones de cada producto de limpieza se deberán mezclar para producir 20 galones de una solución 40% ácida?

A) 7 y 13
B) 8 y 12
C) 9 y 11
D) 10 y 10
E) 16 y 4

Resolución 11

Regla de mezclas

Mezcla indirecta

$$\begin{array}{cccccc}
\underline{\text{N.}^\text{o}\ \text{galones}} & \underline{\text{Concentración}} & & & & \\
x & 25\ \% & \searrow & & \nearrow 10\ \% \Rightarrow 2 & \\
 & & & 40\ \% & & \Rightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{2k}{3k} \\
y & 50\ \% & \nearrow & & \searrow 15\ \% \Rightarrow 3 &
\end{array}$$

<u>Dato</u>:

$$\underbrace{x + y}_{} = 20$$

$$5k = 20$$

$$\therefore k = 4 \quad x = 8 \wedge y = 12$$

Rpta.: 8 y 12

Pregunta 12

Dado el sistema lineal

$$\begin{aligned} x+2y-z&=4 \\ -3x+5y+z&=5 \\ -4x+3y+2z&=1 \end{aligned}$$

Señale la alternativa correcta, luego de determinar la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:

I. El conjunto solución tiene infinitos puntos que constituyen una recta.

II. El conjunto solución tiene infinitos puntos que constituyen un plano.

III. Existe solución que se puede expresar en la forma

$$(x, y, z)=x_o+at,\ y_o+bt,\ z_o+ct),\ t\in\mathbb{R},$$

donde x_o, y_o, z_o, a, b, c son constantes.

A) VVV
B) VFF
C) FFV
D) VFV
E) FFF

Resolución 12

Sistema de ecuaciones

Sistema de ecuaciones lineales

Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \ldots (1) \\ -3x + 5y + z = 5 \ldots (2) \\ -4x + 3y + 2z = 1 \ldots (3) \end{cases}$$

Notamos que la ecuación (3), no es linealmente independiente de las dos primeras.

Por lo tanto el sistema es:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \ldots (1) \\ -3x + 5y + z = 5 \ldots (2) \end{cases}$$

Gráficamente son dos planos secantes, cuyo conjunto solución es una recta.

Rpta.: VFV

Pregunta 13

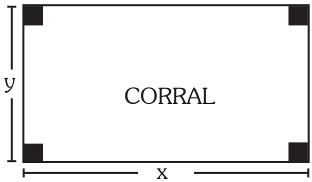
Un granjero tiene un terreno donde siembra hortalizas. Cierto día decide cercar con tablones de madera una parte de su terreno para criar vacas. Las especificaciones que el granjero dio al carpintero fueron las siguientes: El corral debe ser rectangular con un perímetro de 1748 m y debe tener el área más grande posible. Sea A m^2 dicha área, halle la suma de las cifras de A.

A) 34
B) 35
C) 36
D) 37
E) 38

Resolución 13

Funciones

Función cuadrática



Perímetro

$\cancel{2}x+\cancel{2}y=\cancel{17}\cancel{48}$

$x+y=874$

$y=874-x$

La función área está dada por

$A(x)=x(874-x)$

$\underline{A(x)=-x^2+874x}$

Área máxima: $A\left(\frac{-874}{-2}\right)=A(437)=190\,969$

Luego, la suma de cifras es 34.

Rpta.: 34

Pregunta 14

Dada la ecuación:

$$2x^2-nx=2x+m$$

Determine el valor de $4n+m-5$, donde el conjunto solución es $\{5\}$.

A) 15
B) 17
C) 19
D) 21
E) 23

Resolución 14

Ecuaciones

Ecuaciones cuadráticas

De la ecuación $2\cdot x^2-(n+2)\cdot x-m=0$

I. La solución es $x=5$

$2(5)^2-(n+2)\cdot(5)-m=0\rightarrow\boxed{m=40-5n}\ldots\alpha$

II. También por tener una solución: $\Delta=0$.

$(n+2)^2-4\cdot(2)\cdot(-m)=0\rightarrow\boxed{n^2+4\cdot n+4+8m=0}\ldots\beta$

III. α en β: $n^2+4\cdot n+4+8\cdot(40-5n)=0$

$n^2-36n+324=0\rightarrow n=18\wedge m=-50$

Nos piden el valor de $4n+m-5=17$

Rpta.: 17

Pregunta 15

A un atleta que va a participar en una competencia le informaron que cuando haya recorrido 12 km, le faltará recorrer menos de los 3/5 de la longitud total, y si recorre 16 km, la distancia que le faltará recorrer será mayor que 1/5 de la longitud total.

Halle la mayor longitud posible del recorrido de la competencia sabiendo que es un número entero. Dé como respuesta la suma de las cifras de esta longitud.

A) 7
B) 8
C) 9
D) 10
E) 11

Resolución 15

Desigualdades

Inecuaciones lineales

Sea la longitud posible de recorrido "x" km.

i) Si recorre 12 km le faltará $x-12$.

ii) Si recorre 16 km le faltará $x-16$.

Se sabe que $x-12<\frac{3}{5}x\rightarrow x<30$

$$x-16>\frac{1}{5}x\rightarrow x>20$$

Se tiene $20<x<30$.

Por lo tanto, $x_{\text{máx entero}}=29$ km; $\sum_{\text{cfs}}=11$.

Rpta.: 11

Pregunta 16

Señale la alternativa que presenta la secuencia correcta, después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. Toda sucesión acotada es convergente.

II. Toda sucesión monótona es convergente.

III. Toda sucesión convergente es acotada.

A) VVV

B) VFF

C) FVV

D) FFV

E) FFF

Resolución 16

Sucesiones

I. Falsa

En efecto, la regla dice que toda sucesión convergente es acotada, pero lo recíproco no necesariamente es una verdad.

II. Falsa

En efecto, si una sucesión es monótona no se garantiza que sea convergente.

III. Verdadera

En efecto, toda sucesión convergente es acotada.

Rpta.: FFV

Pregunta 17

Si $[(p\wedge q)\vee(\sim r)]\wedge\sim p$ es verdadera.

Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición compuesta es verdadera (V) o falsa (F).

I. $[(\sim p\vee r)\wedge q]\vee\sim p$

II. $\sim p\wedge(\sim r\vee q)$

III. $[p\vee(r\wedge\sim q)]\wedge r$

A) VFV

B) VVF

C) FFV

D) FVV

E) VVV

Resolución 17

Lógica proposicional

Conectores lógicos

Dato:

$$\overbrace{\overbrace{[\overbrace{(\underset{F}{p}\wedge q)}^{F}\vee\overbrace{(\sim \underset{F}{r})}^{V}]}^{V}\wedge\overbrace{\sim \underset{F}{p}}^{V}}^{V}$$

$\therefore\ p\equiv F$

$r\equiv F$

Pide

I. $$\underbrace{[(\sim p\vee r)\wedge q]\vee\underbrace{\sim \underset{F}{p}}_{V}}_{V}$$

II. $$\underbrace{\underbrace{\sim p}_{V}\wedge\underbrace{(\underbrace{\sim r}_{V}\vee q)}_{V}}_{V}$$

III. $$\underbrace{[p\vee(r\wedge\sim q)]\wedge\underbrace{r}_{F}}_{F}$$

Rpta.: VVF

Pregunta 18

Considere la función f: $\mathbb{R}\backslash\{0\}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=|\log_2|x||$. Señale la alternativa que presenta la secuencia correcta, después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. Existen únicamente dos valores para x, que vuelven mínimo a la función f(x).

II. f es creciente en los intervalos $\langle -1;\ 0\rangle$ y $\langle 1;\ +\infty\rangle$.

III. f es inyectiva en el intervalo $\langle 0;+\infty\rangle$.

A) VVV

B) VVF

C) VFF

D) FFV

E) FFF

Resolución 18

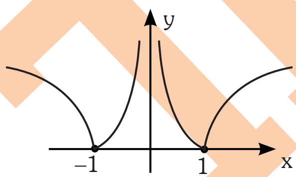
Logaritmos

Función logarítmica

Sea la función

f: $\mathbb{R}\setminus\{0\}\rightarrow\mathbb{R}$ definida $f(x)=|\log_2|x||$.

Graficamos



Luego

I. Verdadero

Los únicos valores que hacen mínima a la función son x=1; x=–1.

II. Verdadero

"f" es creciente es los intervalos $<-1;0>\cup<1;+\infty>$

III. Falso

Del gráfico se observa que en el intervalo de $<0;+\infty>$ no es inyectiva.

Rpta.: VVF

Pregunta 19

Señale la alternativa que presente la secuencia correcta, después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. Existen funciones sobreyectivas que son inyectivas.

II. Existen funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$ que son biyectivas.

III. La suma de dos funciones impares es impar.

A) VVV

B) VVF

C) FVF

D) FFV

E) FFF

Resolución 19

Funciones

Clases de funciones

I. Verdadera

Por ejemplo f: $\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\ |\ y=f(x)=x+1$

II. Verdadera

$$\text{Por ejemplo } f(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2} & ;\ n\text{ par}\\[2mm] -\dfrac{n-1}{2} & ;\ n\text{ impar}\end{cases}$$

III. Verdadera

Sean las funciones impares f y g:

$f(-x)=-f(x)$

$g(-x)=-g(x)$

Sea $h=f+g$

$h(x)=f(x)+g(x)$

$h(-x)=f(-x)+g(-x)$

Según las condiciones:

$h(-x)=-f(x)-g(x)$

$h(-x)=-[f(x)+g(x)]$

$h(-x)=-h(x)$

Por tanto h es impar.

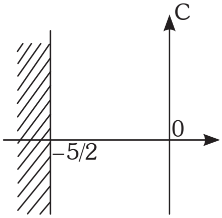
Rpta.: VVV

Pregunta 20

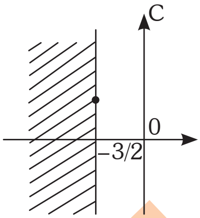
Identifique la gráfica del siguiente conjunto de números complejos

$$M=\left\{z\in\mathbb{C}/|z+2\bar{z}|\geq|z|\ \text{y}\ \frac{|z+2|}{|z+1|}\leq 1\right\}$$

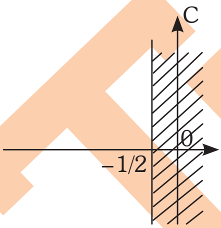
A)



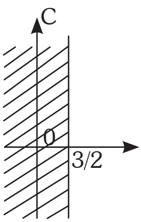
B)



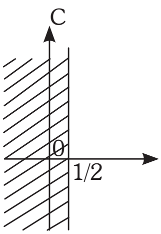
C)



D)



E)



Resolución 20

Números completos

Regiones en $\mathbb{C}$

Se tiene el conjunto

M: $Z=x+yi$; $x,y\in\mathbb{R}$

Reemplazando en las restricciones

$$|x+yi+2(x-yi)|\geq|x+yi| \wedge |x+yi+2|\leq|x+yi+1|$$

$$|3x-yi|\geq|x+yi| \quad \wedge \quad |x+2+yi|\leq|x+1+yi|$$

$\rightarrow 9x^2+\cancel{y^2}\geq x^2+\cancel{y^2}$ $\qquad (x+2)^2+\cancel{y^2}\leq(x+1)^2+\cancel{y^2}$

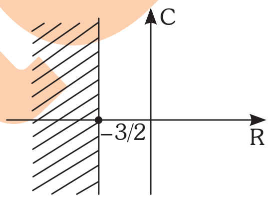
$x^2\geq 0;\ x\in\mathbb{R}\ldots s_1$ $\qquad x^2+4x+4\leq x^2+2x+1$

$x\leq -3/2\ldots S_2$

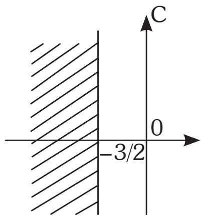
Por lo tanto: $C.S=S_1\wedge S_2$

$$C.S=\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$$

Se tiene: $x\leq -3/2 \wedge y\in\mathbb{R}$

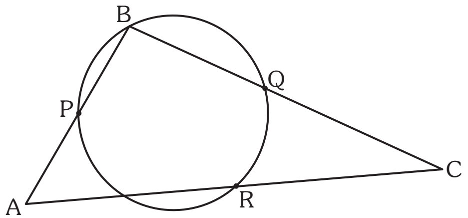


Rpta.:



Pregunta 21

En la figura, P es punto medio de $\overline{AB}$, Q es punto medio de $\overline{BC}$ y R es punto medio de $\overline{AC}$, entonces $m\measuredangle ABC$ es:



A) 75°
B) 80°
C) 85°
D) 90°
E) 95°

Resolución 21

Circunferencia

Cuadrilátero inscrito

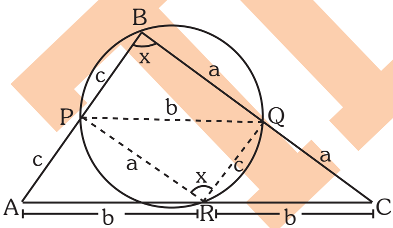
Piden x

$\Delta PBQ \cong \Delta QRP$

$\square PBQR$: inscrito

$x+x=180°$

$\therefore x=90°$



Rpta.: 90°

Pregunta 22

En un triángulo obtusángulo ABC, obtuso en B, se traza la bisectriz interior $\overline{BM}$ y las alturas $\overline{AN}$ y $\overline{CQ}$, donde AN=a y CQ=b. Calcule la medida de la altura trazada desde M en el triángulo BMC.

A) $\dfrac{a}{a+b}$

B) $\dfrac{b}{a+b}$

C) $\dfrac{ab}{a+b}$

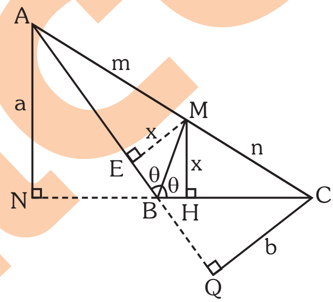
D) $\dfrac{2ab}{a+b}$

E) ab

Resolución 22

Semejanza

Corolario de Thales



Piden: x

- $\overline{MH}//\overline{AN} \rightarrow \dfrac{x}{a}=\dfrac{n}{m+n}$ ...①
- $\overline{ME}//\overline{CQ} \rightarrow \dfrac{x}{b}=\dfrac{m}{m+n}$ ...②
- ①+②: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{x}{b}=\dfrac{m+n}{m+n}$

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

$$\therefore x=\frac{ab}{a+b}$$

Rpta.: $\dfrac{ab}{a+b}$

Pregunta 23

En un trapecio circunscriptible ABCD, isósceles, $\overline{AB}//\overline{CD}$, cuyo perímetro es 20 cm. Las bisectrices exteriores por B y C se intersecan en P; y las bisectrices interiores de B y C en Q. Calcule PQ (en cm).

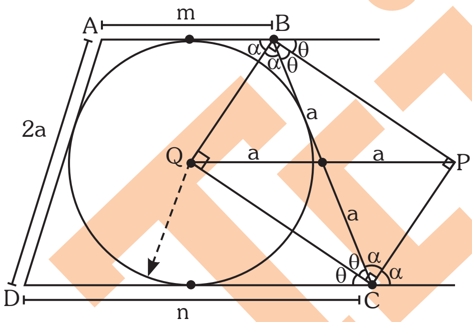
A) 5
B) 10
C) 15
D) 20
E) 25

Resolución 23

Circunferencia

Propiedades

Piden PQ.



Dato: $\underbrace{\text{perímetro}} = 20$

$4a+(m+n)=20$

Teorema de Pitot: $\underline{2a+2a=m+n}$ $\downarrow +$

$8a=20$

$\rightarrow 2a=5$

$\therefore PQ=2a=5$

Rpta.: 5

Pregunta 24

En el arco $\overset{\frown}{BC}$ de una circunferencia circunscrita a un octógono regular ABCDEFGH, se ubica un punto P, tal que PC=1 m y PE=$4\sqrt{2}$ m. Calcule la longitud del radio de la circunferencia (en m).

A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

B) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

C) $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

D) $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$

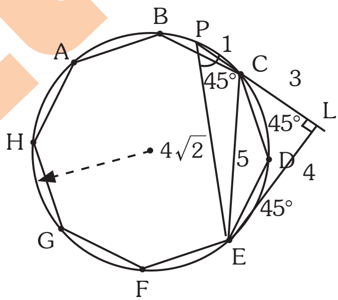
E) $\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$

Resolución 24

Polígonos regulares

Octógono regular

Piden R.



- ∢ inscrito: m∢CPE=45°.
- ⊿ PLE (NOT 45° y 45°) EL=4, CL=3

$\rightarrow$ CE=5

- CE=ℓ_4

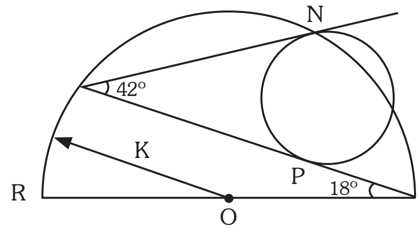
CE=$R\sqrt{2}$

$\therefore R=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

Rpta.: $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

Pregunta 25

En la figura, O es el centro de la semicircunferencia. Además, P y N son puntos de tangencia. Calcule PR.



A) $\frac{k}{2}\sqrt{10-\sqrt{20}}$

B) $\frac{k}{3}\sqrt{10-\sqrt{20}}$

C) $\frac{k}{2}\sqrt{15-\sqrt{20}}$

D) $\frac{k}{4}\sqrt{15-\sqrt{20}}$

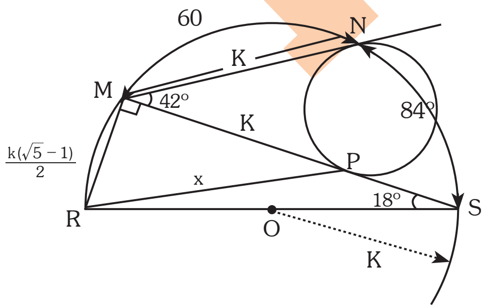
E) $\frac{k}{2}\sqrt{10+\sqrt{20}}$

Resolución 25

Polígonos regulares

Sección áurea

Piden x



$m\overset{\frown}{MR} = 36º \rightarrow MR = \ell_{10}$

$MR = K\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

$m\overset{\frown}{MN} = 60º$

$MN = \ell_6$

$MN = k$

 RMP (T. Pitágoras)

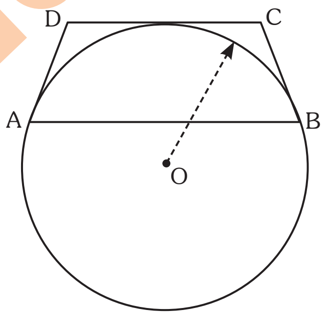
$x^2 = k^2 + \left(\frac{k(\sqrt{5}-1)}{2}\right)^2$

$\therefore\ x = \frac{k}{2}\sqrt{10-\sqrt{20}}$

Rpta.: $\frac{k}{2}\sqrt{10-\sqrt{20}}$

Pregunta 26

En la figura se tiene BC=2,5 cm y el radio de la circunferencia mostrada es de 5 cm. Halle el área del trapecio isósceles ABCD en cm^2, siendo A y B puntos de tangencia.



A) 13

B) 14

C) 15

D) 16

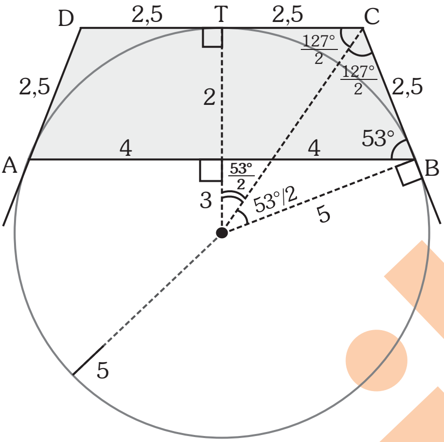
E) 17

Resolución 26

Áreas cuadrangulares

Región trapecial

Piden: $A_{\square ABCD}$



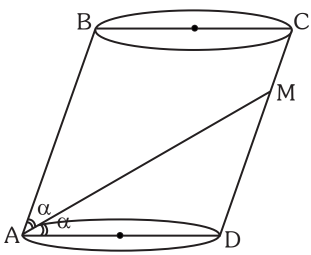
$$A_{\square ABCD}=\left(\frac{8+5}{2}\right)2$$

$$A_{\square ABCD}=13\ u^2$$

Rpta.: 13

Pregunta 27

El paralelogramo ABCD es perpendicular a la base del cilindro oblicuo de sección recta circular y el ángulo BCD mide 53° AD=10, DM=2MC. Calcule el área total del sólido que resulta de quitar la porción de la cuña cilíndrica AMD.



A) $2\pi(25+2\sqrt{5})$

B) $4\pi(25+2\sqrt{5})$

C) $4\pi(25+4\sqrt{5})$

D) $4\pi(25+6\sqrt{5})$

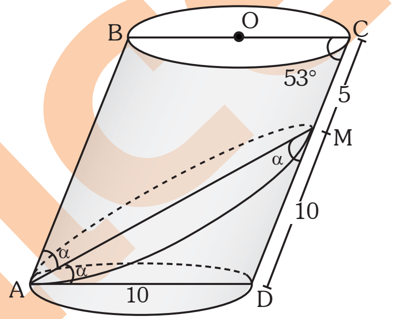
E) $8\pi(5+2\sqrt{5})$

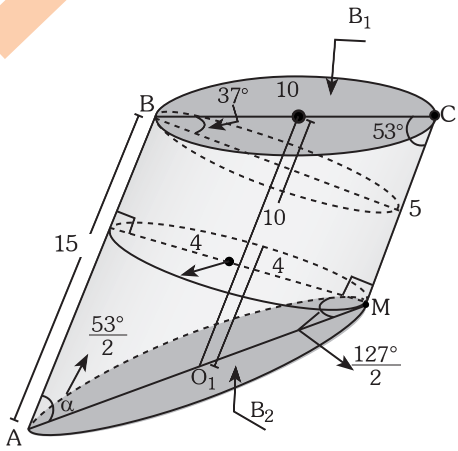
Resolución 27

Prisma y cilindro

Cilindro oblicuo

Piden A total.





Por propiedad

$B_1 \cos 37°=\pi 4^2$

$\rightarrow B_1=20\pi$

$B_2 \cos\dfrac{127°}{2} = \pi 4^2$

$\rightarrow B_2 = 16\pi\sqrt{5}$

$A\ total = A_{sup.\ lat} + B_1 + B_2$

$= 2\pi.4.10 + 20\pi + 16\pi\sqrt{5}$

$= 100\pi + 16\pi\sqrt{5}$

$= 4\pi(25 + 4\sqrt{5})$

Rpta.: $4\pi(25+4\sqrt{5})$

Pregunta 28

Dado un prisma cuadrangular regular ABCD – EFGH, donde AE=2(AB). Sabiendo que la suma de las distancias del punto "B" a los centros de las seis caras del prisma es $(2\sqrt{2}+\sqrt{5}+3)$m. Determine el volumen de dicho prisma (en m^3).

A) 1
B) $\sqrt{2}$
C) $\sqrt{3}$
D) 2
E) $\sqrt{5}$

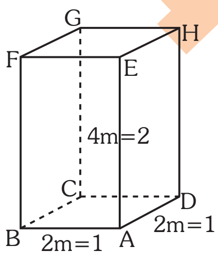
Resolución 28

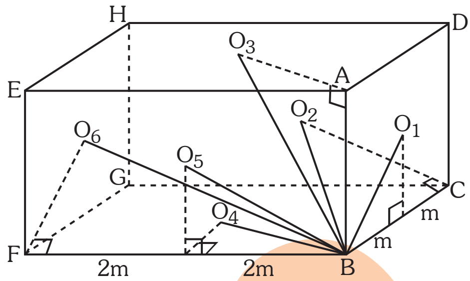
Prisma recto

Paralelepípedo rectangular

Piden el volumen del paralelepípedo.

Dato: AE=2(AB)





Del dato

$$\left.\begin{aligned} BO_1 &= m\sqrt{2} \\ BO_2 &= 3m \\ BO_3 &= 3m \\ BO_4 &= m\sqrt{5} \\ BO_5 &= m\sqrt{5} \\ BO_6 &= 3\sqrt{2}\,m \end{aligned}\right\} +$$

$$(2\sqrt{2}+\sqrt{5}+3) = 2m\,(2\sqrt{2}+\sqrt{5}+3)$$

$$1 = 2m$$

$\therefore\ V = (A_B)\times H = 1^2 \times 2 = 2$

Rpta.: 2

Pregunta 29

Un cilindro de revolución está inscrito en un cono de revolución, de modo que una de las bases del cilindro está sobre la base del cono. Si el volumen del cono es 18 m^3, calcule el volumen del cono parcial determinado (en cm^3), sabiendo que el volumen del cilindro es los $\frac{3}{7}$ del volumen del tronco de cono.

A) $\frac{3}{4}$

B) $\frac{5}{4}$

C) $\frac{7}{4}$

D) $\frac{9}{4}$

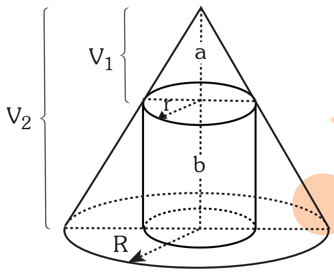
E) $\frac{11}{4}$

Resolución 29

Cono

Tronco de cono

Piden $V_{\substack{\text{cono}\\\text{parcial}}}$.



Dato:

$$V_{cilindro}=\frac{3}{7}V_{tronco}$$

$$\underbrace{V_{tronco}}_{cono}=\frac{b}{3}\pi(R^2+Rr+r^2)$$

$$\frac{7}{\cancel{3}}\cancel{\pi}r^2\cancel{b}=\frac{\cancel{b}}{\cancel{3}}\cancel{\pi}(R^2+Rr+r^2)$$

$R^2+Rr-6r^2=0$

$\rightarrow R=2r$

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{r^3}{(2r)^3}\longrightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{8}$$

$\underbrace{V_2}=18$

$8V_1=18$

$\therefore\ V_1=\frac{9}{4}$

Rpta.: $\frac{9}{4}$

Pregunta 30

Se tiene una pirámide cuadrangular O – ABCD, cuya base ABCD es un rombo, OA=OC=8m, OD=OB=5m . Sabiendo que el perímetro de su base ABCD toma su máximo valor entero par, calcule el área (en m^2) de su superficie lateral.

A) $18\sqrt{11}$

B) $20\sqrt{11}$

C) $22\sqrt{11}$

D) $24\sqrt{11}$

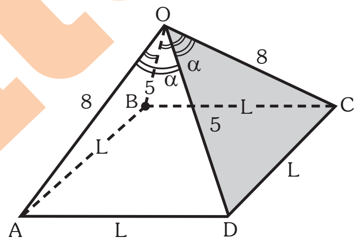
E) $26\sqrt{11}$

Resolución 30

Pirámide

Pirámide cuadrangular

Piden: A superficie lateral.



- $4\alpha<360°\rightarrow\alpha<90°$
- $L^2<5^2+8^2$

  $L<\sqrt{89}$

  $4L<4\sqrt{89}=37.7$

  $\rightarrow(4L)_{\substack{\text{MÁX. ENT}\\\text{PAR}}}=36$

  $L=9$

$A_{DOC}=\sqrt{11\times2\times3\times6}=6\sqrt{11}$

$\therefore$ Área lateral $=4(6\sqrt{11})=24\sqrt{11}$

Rpta.: $24\sqrt{11}$

Pregunta 31

Determine a qué altura de la Tierra debe ubicarse un satélite para que la región visible sea $\frac{1}{3}$ de la superficie terrestre; considere que el radio de la Tierra es R.

A) $\frac{1}{2}$R

B) R

C) $\frac{3}{2}$R

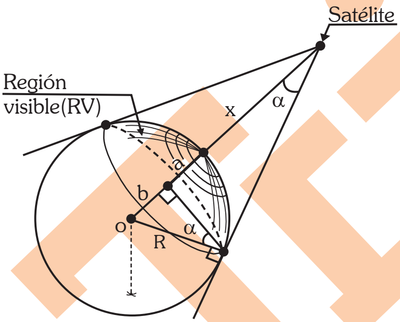
D) 2R

E) 3R

Resolución 31

Esfera

Superficie esférica



Dato: $\mathbb{A}_{RV}=\frac{1}{3}\times\mathbb{A}_{\text{sup. esférica}}$

$2\pi Ra=\frac{1}{3}\times 4\pi R^2$

$a=\frac{2}{3}R$

$a+b=R\rightarrow b=\frac{R}{3}$

Por RMTR: $R^2=(R+x)b$

$\rightarrow x=2R$

Rpta.: 2R

Pregunta 32

Las dos bases de un prismoide son triángulos equiláteros de lados 18ℓ cm y 6ℓ cm, respectivamente, y las caras laterales son trapecios isósceles, donde el área de cada trapecio es $48\ell^2$cm^2. Halle el volumen (en cm^3) del prismoide.

A) $78\sqrt{3}\,\ell^3$

B) $80\sqrt{3}\,\ell^3$

C) $81\sqrt{3}\,\ell^3$

D) $90\sqrt{3}\,\ell^3$

E) $100\sqrt{3}\,\ell^3$

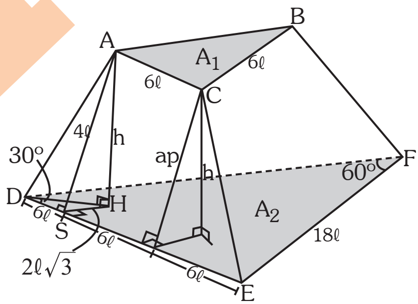
Resolución 32

Tronco de pirámide

Prismoide

Piden

$$V=\frac{h}{3}\left(A_1+\sqrt{A_1\times A_2}+A_2\right)$$



Dato: $\underbrace{A_{\square DACE}}_{\left(\frac{18\ell+6\ell}{2}\right)a_p}=48\ell^2$

$\left(\frac{18\ell+6\ell}{2}\right)a_p=48\ell^2$

$\rightarrow a_p=4\ell$

⊿DHS: (30°; 60°)

$\rightarrow EH=2\ell\sqrt{3}$

⊿ASH: (30°; 60°)

$\rightarrow h=2\ell$

$$V=\frac{2\ell}{3}\left(\frac{(6\ell)^2\sqrt{3}}{4}+\sqrt{9\ell^2\sqrt{3}\times 81\ell^2\sqrt{3}}+\frac{(18\ell)^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\therefore\ V=78\ell^3\sqrt{3}$$

Rpta.: $78\sqrt{3}\,\ell^3$

Pregunta 33

Sean las funciones

$g(x)=2^{\arctan(x)}$, $x\in[-1;1]$

$h(x)=\operatorname{arcsen}(x)$, $x\in[-1;1]$

Determine el número de elementos (la cardinalidad) de

$$S=\{x\in[-1,1]/g(x)=h(x)\}$$

A) 6
B) 4
C) 3
D) 1
E) 0

Resolución 33

Función trigonométrica inversa

Gráfica de funciones

Sean las funciones

$g(x)=2^{\arctan x}$, $x\in[-1;1]$

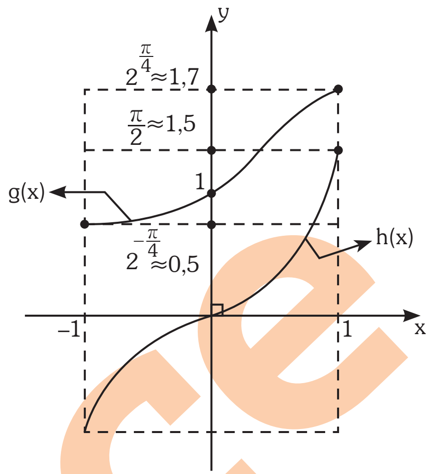
$h(x)=\operatorname{arcsen}x$, $x\in[-1;1]$

$S=\{x\in[-1;1]/g(x)=h(x)\}$

- De las gráficas, observamos que no existen puntos de corte

$\rightarrow$ con lo cual $n(S)=0$

Graficamos



Rpta.: 0

Pregunta 34

Para $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ determine el conjunto solución de la ecuación

$$\sec(x)(2\operatorname{sen}(x)+1)-4\operatorname{sen}(x)-2=0$$

Dé como respuesta la suma de los elementos de ese conjunto.

A) $-\frac{\pi}{6}$
B) $\frac{\pi}{6}$
C) $\frac{\pi}{3}$
D) $\frac{2\pi}{3}$
E) π

Resolución 34

Ecuación trigonométrica

Ecuación trigonométrica

De la ecuación:

$\sec x(2\operatorname{sen}x+1)-2(2\operatorname{sen}x+1)=0$

$(2\operatorname{sen}x+1)(\sec x-2)=0,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

i) $\operatorname{sen}x=-\frac{1}{2}$ $\qquad x=-\frac{\pi}{6}$

ii) $\sec x=2$ $\qquad x=\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{3}$

$\therefore$ suma $=-\frac{\pi}{6}$

Rpta.: $-\frac{\pi}{6}$

Pregunta 35

En un triángulo ABC, $bc=8\sqrt{4+2\sqrt{2}}\,u^2$ y $\operatorname{sen}^6(A)+\cos^6(A)=\frac{5}{8}$ $\left(A<\frac{\pi}{4}\right)$. Calcule el área de la región triangular (en u^2).

A) 2
B) 4
C) 6
D) 8
E) 10

Resolución 35

Resolución de triángulos oblicuángulos

Área de regiones triangulares

Del dato:

$\operatorname{Sen}^6A+\operatorname{Cos}^6A=\frac{5}{8}$

$\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\operatorname{Cos}(4A)=\frac{5}{8}$

$\operatorname{Cos}(4A)=0$

$A=\frac{\pi}{8}$

Área de la región triangular: $S_{\Delta ABC}$

$S_{\Delta ABC}=\frac{bc}{2}\operatorname{Sen}(A)=\frac{8\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}.\operatorname{Sen}\frac{\pi}{8}u^2$

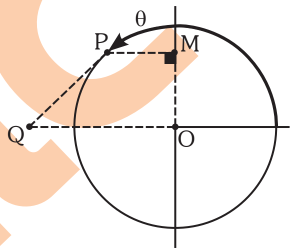
$S_{\Delta ABC}=4\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.\left[\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right]u^2$

$S_{\Delta ABC}=4u^2$

Rpta.: 4

Pregunta 36

En la figura mostrada, se tiene una circunferencia trigonométrica donde $\overline{PQ}$ es tangente a la circunferencia en P. Calcule el área del trapecio OMPQ en función de θ.



A) $\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{2}(\cos(\theta)+\sec(\theta))$

B) $\frac{\cos(\theta)}{2}(\cos(\theta)+\sec(\theta))$

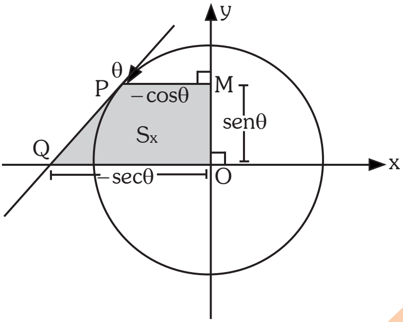
C) $-\frac{\cos(\theta)}{2}(\operatorname{sen}(\theta)+\csc(\theta))$

D) $-\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{2}(\cos(\theta)-\sec(\theta))$

E) $-\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{2}(\cos(\theta)+\sec(\theta))$

Resolución 36

Circunferencia trigonométrica



El área del trapecio es:

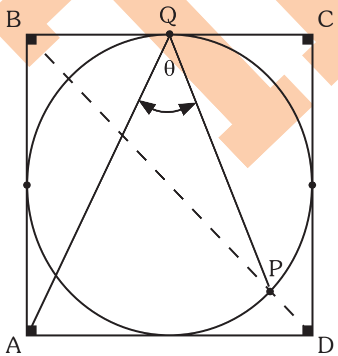
$$S_x=\left(\frac{-\cos\theta-\sec\theta}{2}\right)\text{sen}\theta$$

$$\therefore\ S_x=-\frac{\text{sen}\theta}{2}(\cos\theta+\sec\theta)$$

Rpta.: $-\dfrac{\text{sen}(\theta)}{2}(\cos(\theta)+\sec(\theta))$

Pregunta 37

En la figura mostrada, ABCD es un cuadrado. Si $\overline{BD}$ corta a la circunferencia inscrita en P y Q es punto de tangencia, calcule tan(θ) .



A) $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{5}$

B) $\dfrac{3\sqrt{2}-1}{3}$

C) $\dfrac{5\sqrt{2}+1}{7}$

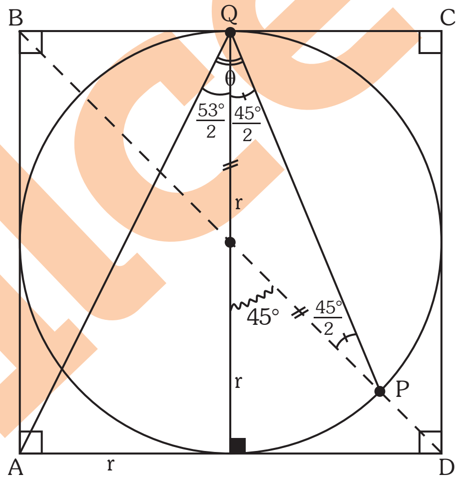
D) $\dfrac{2\sqrt{2}+1}{4}$

E) $\dfrac{3\sqrt{2}+1}{5}$

Resolución 37

Identidades de ángulos compuestos

Razones trigométricas de ángulos notables



Calcula tanθ.

Del gráfico, observamos que $\theta=\dfrac{53°}{2}+\dfrac{45°}{2}$.

$$\rightarrow \tan\theta=\tan\left(\frac{53°}{2}+\frac{45°}{2}\right)$$

$$\boxed{\tan\frac{53°}{2}=\frac{1}{2}}$$

$$\tan\theta=\frac{\tan\dfrac{53°}{2}+\tan\dfrac{45°}{2}}{1-\tan\dfrac{53°}{2}.\tan\dfrac{45°}{2}}$$

$$\boxed{\tan\frac{45°}{2}=\sqrt{2}-1}$$

$$\tan\theta=\frac{\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}-1}{1-\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1)}=\frac{(2\sqrt{2}-1)}{(3-\sqrt{2})}\cdot\frac{(3+\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})}$$

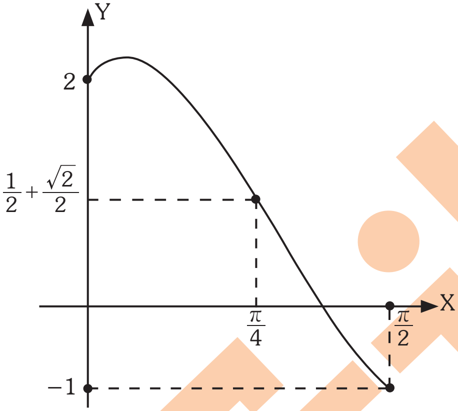
$$\tan\theta=\frac{5\sqrt{2}+1}{7}$$

Rpta.: $\frac{5\sqrt{2}+1}{7}$

Pregunta 38

Sean A, B, C constantes y f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = A\,\text{sen}(x) + B\cos(x) + C\,\text{sen}(x)\cos(x)$

cuya gráfica parcial se muestra a continuación:



Calcule A+B+C

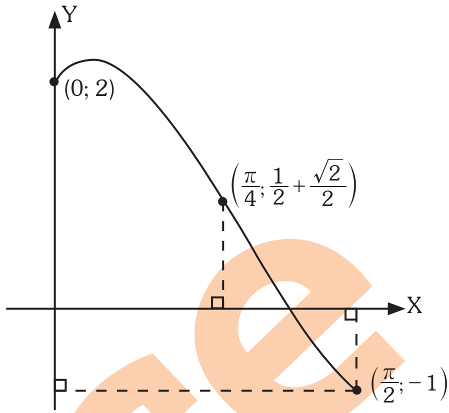
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

Resolución 38

Función trigonométrica

Teoría de periodos

$f(x)=A\,\text{sen}x+B\cos x+C\,\text{sen}x\cos x$



Dada la función f evaluamos en los puntos

- $f(0)=2$

$$A\underbrace{\text{sen}0}_{0}+B\underbrace{\cos 0}_{1}+C\underbrace{\text{sen}0}_{0}.\underbrace{\cos 0}_{1}=2$$

$B=2$

- $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$

$$A\underbrace{\text{sen}\frac{\pi}{2}}_{1}+B\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}+C\underbrace{\text{sen}\frac{\pi}{2}}_{1}\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}=-1$$

$A=-1$

- $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$(-1).\frac{\sqrt{2}}{2}+(2).\frac{\sqrt{2}}{2}+C.\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+C.\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$C=1$$

Con lo cual

$A+B+C=-1+2+1=2$

Rpta.: 2

Pregunta 39

La ecuación cuadrática

$$2x^2+4xy+5y^2-6y+3=0$$

representa:

A) una elipse
B) una circunferencia
C) una hipérbola
D) una recta
E) un punto

Resolución 39

Secciones cónicas

Ecuación general de segundo grado

De la ecuación, agrupamos para factorizar.

$2x^2+4xy+5y^2-6y+3=0$
$2x^2+4xy+2y^2+3y^2-6y+3=0$
$2(x+y)^2+3(y-1)^2=0$

de lo cual se cumple
$x+y=0 \wedge y-1=0$

$y=1 \Rightarrow x=-1$
$\therefore$ $(-1;1)$ es un punto

Rpta.: un punto

Pregunta 40

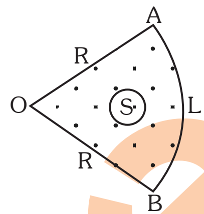
Un terreno tiene la forma de un sector circular y su perímetro mide 1500 m. ¿Cuál es la medida del radio (en m) del sector circular, sabiendo que el área de este es la mayor posible?

A) 175
B) 225
C) 275
D) 375
E) 475

Resolución 40

Área del sector circular

Área del sector circular



Dato: $2R+L=1500$ m
Condición área máxima

$S=\dfrac{L.R}{2}$

$S=\dfrac{L.2R}{4}$

Para que el área sea máxima, $L=2R$.
$2R+2R=1500$
$R=375$

Rpta.: 375