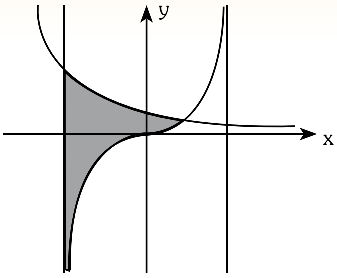
01. La región sombreada de la figura mostrada, representa el conjunto solución de un sistema de inecuaciones. Determine dicho sistema.



A) $\begin{cases} y+e^{-x}\le 0 \\ y-\tan x\ge 0 \end{cases}$

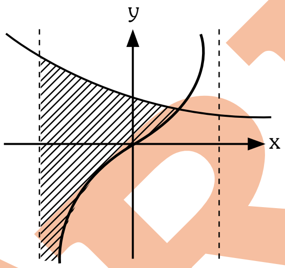
B) $\begin{cases} y-e^{-x}\ge 0 \\ y-\tan x\le 0 \\ x\le \frac{\pi}{2} \end{cases}$

C) $\begin{cases} y+e^{-x}\le 0 \\ y+\tan x\ge 0 \\ x\ge -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

D) $\begin{cases} y-e^{-x}\ge 0 \\ y+\tan x\le 0 \end{cases}$

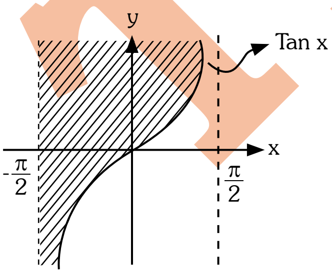
E) $\begin{cases} y-e^{-x}\le 0 \\ y-\tan x\ge 0 \\ x\ge -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

Solución:
De la gráfica:



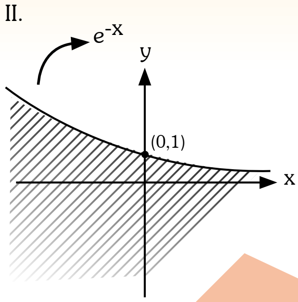
Tenemos:

I.



⇨ Donde: $x\geqslant -\frac{\pi}{2}$ .... S_1
$y-\tan x\geqslant 0$

II.



⇨ Donde: $y-e^{-x}\leqslant 0$ .... S_2

∴ El sistema pedido, será determinado por la intersección de S_1 con S_2

$y-e^{-x}\leqslant 0$

$y-\tan x\geqslant 0$

$x\geqslant -\frac{\pi}{2}$

Rpta: **E**

02. Un lago se llena de dos especies de peces S_1 y S_2. La especie S_1 proporciona un peso promedio de 4 kg de carne y la especie S_2 un peso promedio de 2 kg. Dos tipos de comida F_1 y F_2 están disponibles en el lago. El requerimiento promedio de la especie S_1 es 1 unidad de F_1 y 3 unidades de F_2, mientras que el requerimiento de S_2 son 2 unidades de F_1 y 1 unidad de F_2 cada día. Si se dispone diariamente de 500 unidadesde F_1 y 900 unidadesde F_2, determine el número total de peces en el lago que maximice el peso total de carne de pescado.

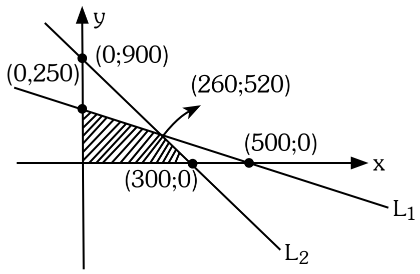
A) 360 B) 380 C) 400
D) 420 E) 460

Solución:
De los datos:

	S_1 x	S_2 y	Totales
F_1	1	2	500
F_2	3	1	900
Función objetivo	4	2	

Restricciones: $\begin{cases} x+2y\le 500 \,\ldots\ldots\, L_1 \\ 3x+y\le 900 \,\ldots\ldots\, L_2 \\ x\ge 0 \wedge y\ge 0 \end{cases}$

Graficando:



Evaluando la función objetivo

* $f(x;y)=4x+2y$

$f(0;250)=500$

$f(260;120)=1680 \rightarrow$ solución óptima $\begin{pmatrix} x=260 \\ y=120 \end{pmatrix}$

$f(300;0)=120$

$\therefore$ El número total de peces es 380

Rpta: **B**

03. Sabiendo que $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$, halle la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$

A) 0,5 B) 1,0 C) 1,5
D) 2,0 E) 2,5

Solución:

Sea: $S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$

Entonces:

$$S=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}\left(\frac{n+1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)$$

O bien: $S=\lim_{K\to\infty}\sum_{n=0}^{k}\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)$

$$S=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)$$

$S=1$

Rpta: **B**

04. Sea una sucesión de rectángulos R_1, R_2, ... R_k, ... tales que para cada $k\geq 1$, el k-ésimo rectángulo tiene lados de longitudes $\frac{1}{k}$ y $\frac{1}{k+1}$. Entonces, la suma de las áreas de todos los rectángulos es igual a:

A) 0,5 B) 1,0 C) 1,5
D) 2,5 E) ∞

Solución:

El rectángulo R_k tiene dimensiones: $\frac{1}{k}$ y $\frac{1}{k+1}$; $k\geq 1$

$$\text{Área }(R_k)=\left(\frac{1}{k}\right)\left(\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

Luego sea S: suma de todas las áreas

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}R_k=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$S=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$S=1$

Rpta: **B**

05. En la cuenta de ahorros del banco A se remuneran los depósitos con 1,5% de interés anual, libre de mantenimiento, pero no se remuneran los primeros S/.500 de la cuenta.
El banco B paga 1% de interés y cobra S/.1 por mantenimiento en el mismo periodo. Si Arnaldo, Bernardo, Cernaldo y Dernaldo tienen respectivamente S/.1250, S/.2130, S/.4320 y S/.7450, ¿cuántos de ellos deberían depositar su dinero en el banco A para obtener mayor beneficio en un año?

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

Solución:
Banco A

	Capital Depositado	Capital Considerado (500 menos)	Interés (1.5%)
Arnaldo	1250	750	11,25
Bernaldo	2130	1630	24,45
Cernaldo	4320	3820	57,30
Dernaldo	7450	6950	104,25

Banco B

	Capital Considerado	Interés (1%)	Menos S/. 1 de comisión
Arnaldo	1250	12,50	11,50
Bernaldo	2130	21,30	20,30
Cernaldo	4320	43,20	42,20
Dernaldo	7450	74,50	73,50

Los que obtienen mayor beneficio en el banco "A" son los tres últimos.

Rpta: **D**

06. En un supermercado donde el sueldo promedio es de S/.600 se incrementa el personal en 25% del ya existente, ingresando el nuevo personal con un sueldo promedio igual al 60% de los antiguos. Si 3 meses más tarde se incrementa cada sueldo en 20%, más S/.30, ¿cuánto es el nuevo sueldo promedio de todo el personal?

A) S/.692,40 B) S/.692,60
C) S/.692,70 D) S/.692,80
E) S/.692,90

Solución:

# Empleados	Sueldo Promedio ($\bar{x}$)	Σ sueldos
100	S/.600	S/.60 000
25	S/.360=60%(600)	S/. 9 000
n=125		Σ:S/.69 000

- El nuevo sueldo promedio seria:
  $\bar{x}\ \dfrac{69\,000}{125} = S/.552$
- Si 3 meses más tarde se incrementa cada sueldo en 20% mas S/.30. El nuevo sueldo promedio seria:
  120% (S/.552)+S/.30= S/.692,40.

Rpta: **A**

07. Para representar a un colegio en las olimpiadas matemáticas del 2007 se han preseleccionado 10 alumnos varones y 5 mujeres. El comité organizador del evento decide que cada colegio participante envíe solo tres alumnos. Calcule la probabilidad que el citado colegio envie a todos sus representantes del mismo sexo.

A) 1/7 B) 2/7 C) 3/7
D) 4/7 E) 5/7

Solución:
De un grupo de: 10 hombres y 5 mujeres el experimento aleatorio consiste en seleccionar 3 alumnos por colegio.
El evento a realizar es:
E= "los tres alumnos son del mismo sexo"

$$E = (H_1 \wedge H_2 \wedge H_3) \cup (M_1 \wedge M_2 \wedge M_3)$$

$$P(E): \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} \times \frac{8}{13} + \frac{5}{15} \times \frac{4}{14} \times \frac{3}{13}$$

$$\frac{720+60}{15 \times 14 \times 13} = \frac{\overset{60}{\cancel{780}}}{15 \times 14 \times \cancel{13}} = \frac{2}{7}$$

Rpta: **B**

08. Se tiene el número N = $\overline{6ab1}$
Al dividir N entre 29 se encuentra un resto máximo. Calcule la suma de las cifras de N sabiendo que N es el máximo posible.

A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 16

Solución:

$N = \overline{6ab1} = \overset{\circ}{29} + 28$

Descomponiendo:

$6001 + 10(\overline{ab}) = \overset{\circ}{29} + 28$

$(\overset{\circ}{29} - 2) + 10(\overline{ab}) = \overset{\circ}{29} + 28$

$10(\overline{ab}) - 30 = \overset{\circ}{29}$

$10(\overline{ab} - 3) = \overset{\circ}{29} \Rightarrow \overline{ab} - 3 = \overset{\circ}{29}$

$\overline{ab} = \overset{\circ}{29} + 3$

$\therefore \overline{ab}$ puede ser: 32, 61 ó 90

N máximo$=\overline{6ab1} = 6901$

Σcifras : $6 + 9 + 0 + 1 = 16$

Rpta: **E**

09. Se funden 450 g de una aleación con 50 g de oro puro y se observa que la ley de oro se incrementa en 0,02 con respecto de la ley inicial. ¿Cuál es la ley de la aleación inicial?

A) 0,800 B) 0,850
C) 0,880 D) 0,0890
E) 0,0900

Solución:
Sean

	Pesos	Leyes
Aleación	450gr	L
Au (puro)	50	1
	500 gr	L+0,02

$$\Rightarrow L + 0{,}02 = \frac{450(L) + 50(1)}{500}$$

Desarrollando: L= 0,800

Rpta: **A**

10. ¿Cuántos números enteros menores que 100 existen que son cubos perfectos y que al ser multiplicados por 3 se convierten en cuadrados perfectos?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Solución:
Si N= cubo perfecto: $K^3 < 100$
K= {1; 2; 3; 4} en $\mathbb{N}^{(+)}$= {1; 2; 3;....}

Además: $\underbrace{3N}_{\text{Cuadrado Perfecto}}= 3q^3$= {3; 24; 81; 192}

$\therefore N = 3^3 = 27$

Existe una sola solución en $\mathbb{N}^{(+)}$

* Obs: Si consideramos la potenciación en $\mathbb{Z}$ habría que considerar la solución trivial N=0, además de N=27.

A

11. Si el número N que se factoriza como N = 51 (117^n), tiene la tercera parte del número de divisores de 311040, determine el valor de "n".

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Solución:

$311040 = 2^8 . 3^5 . 5^1$

$CD(311040) = 9 . 6 . 2 = 108$

$N = 51\,.\,(117)^n$

$\Rightarrow N = 17^1\,.\,13^n\,.\,3^{2n+1}$

Por dato:

$2(n+1)(2n+2) = 36 \longrightarrow \boxed{n=2}$

Rpta: **B**

12. Sea Q el conjunto de los números racionales y el intervalo $\langle 0\,;1]$
Se dan las siguientes proposiciones:
   I. Todo número **a** en $\langle 0;\,1] \cap Q$ se puede expresar como un decimal periódico.
   II. Todo número **a** en $\langle 0;\,1]$ se puede expresar en el sistema binario, en la forma **a** $= 0,\, a_1\, a_2 \ldots a_i \ldots$, donde el número de cifras ai iguales a 1 es infinito.
   III. Si $r \in \langle 0;\,1] - Q$ entonces $\frac{1}{r} \in \langle 0;\,1] - Q$

Indique la secuencia correcta, después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

A) V V F B) V V V C) V F V
D) V F F E) F V F

Solución:

De los enunciados

I. Todo número a en $< 0;1] \cap Q$ se puede expresar como un decimal periódico, es verdadero, porque:
Si: $a \in < 0,1] \cap Q \rightarrow a \in Q$
Luego: se puede expresar como un decimal periódico.

Ej:

$\frac{1}{2} = 0,4\overset{\frown}{9}\;;\; \frac{1}{3} = 0,\overset{\frown}{3}\;;\; \frac{1}{6} = 0,1\overset{\frown}{6}$ (V)

II. Todo número a en $< 0;\,1]$ se puede expresar en el sistema binario, en la forma: $a = 0, a_1 a_2 \ldots\ldots a_i \ldots$ donde el número de cifras ai iguales a 1 es infinito, este enunciado el falso, porque, si: $a = \frac{1}{4}$
$\Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{100_2} = 0{,}01_{(2)}$ donde
la cantidad de cifras 1 es finita.
$\therefore$ La proposición es (F)

III. Si: $r \in < 0,1] - Q$, entonces
$\frac{1}{r} \in < 0;1] - Q$ (F)

$\Rightarrow r \in < 0,1] - Q \Rightarrow r \in II$

Ejem: $\frac{1}{\sqrt{2}} \in < 0;1] - Q$

$\frac{1}{r} = \sqrt{2} \notin < 0;1] - Q$

Luego: VFF

Rpta: **C**

13. Si las ecuaciones $2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} = 5$ y $ax^2 + bx + 8 = 0$ tienen las mismas raíces, hallar : a + b.

A) -34 B) -32 C) -30
D) -26 E) 24

Solución:

$2x + \frac{2}{\sqrt{x}} = 5$

$2(\sqrt{x})^2 - 5(\sqrt{x}) + 2 = 0$

$(2\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2) = 0$

$x = \frac{1}{4} \;\vee\; x = 4$

Luego:

$\left(x - \frac{1}{4}\right)(x-4) = 0$

$4x^2 - 17x + 4 = 0$

O bien:

$8x^2 - 34x + 8 = 0$

Comparando:

$a = 8\,;\; b = -34 \;\therefore a + b = -26$

Rpta: **D**

14. Dados los conjuntos.

$A = \{(x+1) \in R / x^2 - 2x + 1 > 0\}$

$B = \{(x-2) \in R / x^2 + 6x + 9 \geq 0\}$

$C = \left\{\frac{1}{x} \in R / 4x^2 - 4x + 1 \leq 0\right\}$

$D = \{x \in R / 25x^2 + 10x + 1 < 0\}$

Calcule : $[(A \cap B) \setminus D] \cup C$

A) $\{2\}$ B) $\left\{2, \frac{1}{5}\right\}$

C) $R - \left\{\frac{1}{5}\right\}$ D) $R - \{2\}$

E) R

Solución:

De los conjuntos mencionados :

$A = \{(x+1) \in R / x^2 - 2x + 1 > 0\}$

$\Rightarrow (x-1)^2 > 0 \;\therefore\; x \in R - \{1\}$

$B = \{(x-2) \in R / x^2 + 6x + 9 \geq 0\}$

$\Rightarrow (x+3)^2 \geq 0 \;\therefore\; x \in R$

$C = \left\{\frac{1}{x} \in R / 4x^2 - 4x + 1 \leq 0\right\}$

$\Rightarrow (2x-1)^2 \leq 0 \quad \therefore\; x = 1/2$

$D = \{x \in R / 25x^2 + 10x + 1 < 0\}$

$\Rightarrow (5x+1)^2 < 0$

$\therefore\; x \notin R$

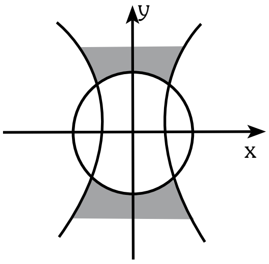
$A = R - \{2\}$

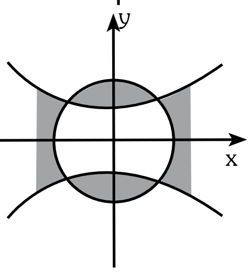
$B = \mathbb{R}$
$C = \{2\}$
$D = \phi$
$[(A \cap B) \setminus D] \cup C =$
$\mathbb{R} - \{2\} \cup \{2\} = \mathbb{R}$

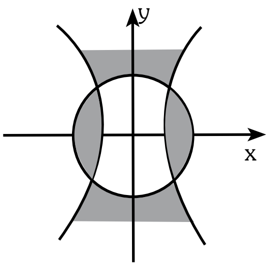
Rpta: **E**

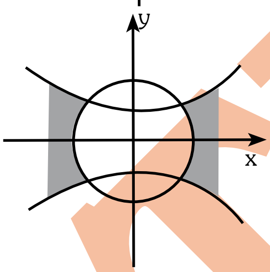
15. El gráfico del conjunto solución del sistema de inecuaciones.

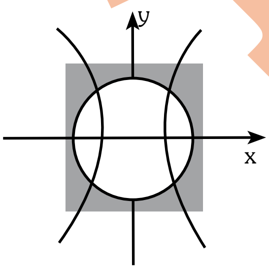
$\begin{matrix} x^2 + y^2 \geq 4 \\ x^2 - y^2 \leq 1 \end{matrix}$ es representado por la región sombreada:

A)


B)


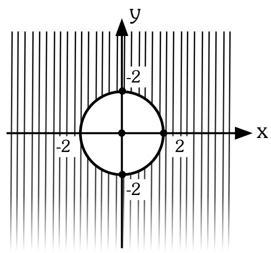
C)


D)


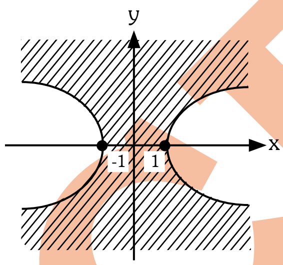
E)


Solución:

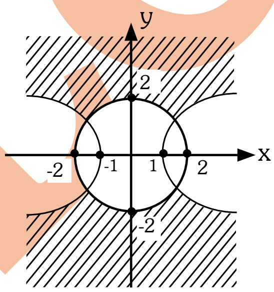
$x^2 + y^2 \geqslant 4$



$$x^2 - y^2 \leqslant 1$$
$$x^2 \leqslant 1 + y^2$$
$$|x| \leqslant \sqrt{1 + y^2}$$
$$-\sqrt{1 + y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{1 + y^2}$$



Intersección de gráficas



Rpta: **A**

16. Resuelva la inecuación exponencial $3^{|x|^2 - |x|} < 2^{1 - (\sqrt{x})^2}$ e indique el intervalo solución.

A) $[0, -\infty\rangle$ B) $[0, 1\rangle$
C) $\langle 1, +\infty\rangle$ D) $[0, \log_3 2\rangle$
E) $\langle 1, \log_3 2\rangle$

Solución:

$3^{|x|^2 - |x|} < 2^{1 - (\sqrt{x})^2}$

La inecuación se define en $x \geq 0$ (intervalo de definición)

$$3^{x^2 - x} < 2^{1 - x}$$

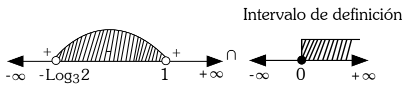
Tomando logaritmos en base 3 (creciente)

$\text{Log}_3 3^{x^2-x} < \text{Log}_3 2^{1-x}$

$x^2 - x < (1-x)\text{Log}_3 2$

$x(x-1) - (1-x)\text{Log}_3 2 < 0$

$(x-1)(x+\text{Log}_3 2) < 0$



$x \in [0;1\rangle$

Rpta: **B**

17. Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F):
I. La composición de una función par con una función impar es una función par.
II. El producto de dos funciones impares es una función impar.
III. La suma de dos funciones pares es una función par.

A) V F V B) V V V C) F V V
D) F F V E) V F F

Solución:
I. Verdadero
Sea: F: Par ; G: impar

$(F\circ G)_{(x)} = F[G_{(x)}]$

$(F\circ G)_{(-x)} = F_{[G(-x)]} F_{[-G(x)]}$ (G: impar)

$(F\circ G)_{(-x)} = F_{[G(x)]}$ (F: par)

$(F\circ G)_{(-x)} = (F\circ G)_{(x)}$ (F: par)

$\therefore$ F o G es par

II. Falso

Sea: F: impar; G: impar

$H_{(x)} = F_{(x)} \cdot G_{(x)}$

$H_{(-x)} = F_{(-x)} \cdot G_{(-x)}$

$H_{(-x)} = (-F_{(x)})(-G_{(x)})$; (F; G: impares)

$H_{(-x)} = F_{(x)} \cdot G_{(X)}$

$H_{(-x)} = H_{(x)}$ $\therefore$ H es par

III. Verdadero:

Sea: F: par ; G: par

$J_{(x)} = F_{(x)} + G_{(x)}$

$J_{(-x)} = F_{(-x)} + G_{(-x)}$

$J_{(-x)} = F_{(x)} + G_{(x)}$

$J_{(-x)} = J_{(x)}$ $\therefore$ J es par

Rpta: **A**

18. Si $P(x) = x^3 + ax^2 - x + b - 6$ es divisibe entre $x^2 - 1$ y la suma de los valores de x que cumplen P(x) = 0 es -4. Calcule el producto de a y b.

A) -7 B) -4 C) 4
D) 5 E) 8

Solución:

$\dfrac{P(x)}{x^2-1} \rightarrow \text{Residuo} = 0$

$$\begin{array}{c|cc:cc}
1 & 1 & a & -1 & b-6 \\
\hline
0 & & 0 & 1 & \\
1 & & & 0 & a \\
\hline
 & 1 & a & 0 & a+b-6 \rightarrow a+b-6=0
\end{array}$$

P(x) = (x+1) (x-1) (x+a)

$P(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = -a \end{cases} \rightarrow -1 + 1 - a = -4$
$a = 4 \quad b = 2$
$ab = 8$

Rpta: **E**

19. Indique la secuencia correcta después de determinar si las proposiciones relacionadas a matrices son verdaderas (V) o falsas (F):
I. Si A^2 es simétrica, entonces A es simétrica.
II. Si A + B y B son simétricas, entonces A es simétrica.
III. Si A y B son matrices del mismo orden, ambas simétricas, entonces AB es simétrica.

A) F F F B) F F V C) F V F
D) V F F E) V V F

Solución:
I) FALSO, las matrices involutivas no necesariamente son simétricas.

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

No es simétrica M. Simétrica

II) VERDADERO
$A+B=(A+B)^t$, $B = B^t$
$A+B=A^t+B^t$
$A = A$ A es simétrica.

III) FALSO
$\begin{cases} A = A^t \\ B = B^t \end{cases}$
$AB = A^t B^t$
$AB = (BA)^t$
$AB \neq (AB)^t$

AB no es simétrica.

Rpta: **C**

20. Señale el menor valor para x que dé solución al sistema siguiente:

$$\begin{cases} 4x^2+y^2=-25\dfrac{x}{|x|} \\ |2x-3|+y=10 \end{cases}$$

A) -4 B) -3 C) -2
D) -1 E) 0

Solución:

$$4x^2+y^2=-25\frac{x}{|x|}$$

Caso I : $x>0$ $\quad 4x^2+y^2=-25$

(No tiene solución en R)

Caso II: $x<0$ $\quad 2x-3<-3$

$$\begin{cases} 4x^2+y^2=25 \\ -2x+3+y=10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x^2+y^2=25 \ldots \alpha \\ y=2x+7 \ldots \beta \end{cases}$$

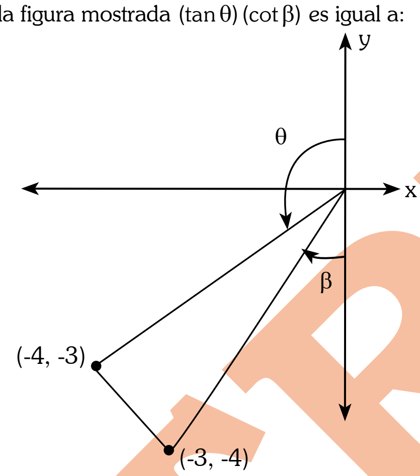
β en α : $4x^2+(2x+7)^2=25$

Resolviendo: $x_1=-2 \quad x_2=-\frac{3}{2}$

Menor valor : -2

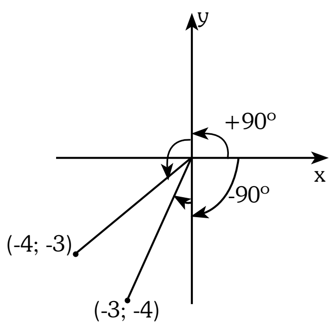
Rpta: **C**

21. En la figura mostrada $(\tan\theta)(\cot\beta)$ es igual a:



A) $\frac{9}{16}$ B) 1 C) $\frac{16}{9}$
D) $\frac{7}{2}$ E) 3

Solución:



Del gráfico :

i) $\underbrace{\text{ctg}(90^o+\theta)}=\frac{x}{y}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$

$-\text{tg}\theta=\frac{4}{3} \rightarrow \therefore \text{tg}\theta=-4/3$

ii) $\underbrace{\text{tg}(-90^o+\beta)}=\frac{y}{x}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$

$-\text{ctg}\beta=\frac{4}{3} \rightarrow \therefore \text{ctg}\beta=-4/3$

Piden : $\text{tg}\theta\cdot\text{ctg}\beta=\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)$

$=\frac{16}{9}$

Rpta: **C**

22. Calcule el valor de $E=\sec 80^o+8\cos^2 80^o$

A) 4 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

Solución:

Por R.T. complementarias

$\boxed{\cos 80^o=\text{sen}10^o}$

$E=\csc 10^o+8\text{sen}^2 10^o$

Pasando a seno :

Fórmula de degradación

$=\dfrac{1+2\boxed{4\text{sen}^3 10^o}}{\text{sen}10^o}$

$=\dfrac{1+2(3\text{sen}10^o-\text{sen}30^o)}{\text{sen}10^o}$

$=\dfrac{1+6\text{sen}10^o}{\text{sen}10^o}$

$\therefore E=6$

Rpta: **B**

23. Al resolver la inecuación : $\text{arc senx}-\text{arc cot}x<\frac{\pi}{2}$

Se tiene que : $x\in[a,b]$

Calcule el valor de : (a^2+b^2)

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1
D) 2 E) 4

Solución:

$\underbrace{\text{arc senx}}_{(i)}-\underbrace{\text{arc ctgx}}_{(ii)}<\frac{\pi}{2}$

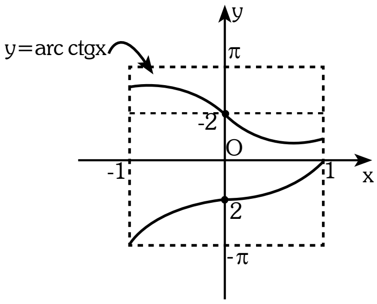
De (i) $\wedge$ (ii) : $x\in[-1,1]$

Sabemos que : $\text{arc senx}=\frac{\pi}{2}-\text{arc cos}x$

Reemplazando : $\frac{\pi}{2}-\text{arc cos}x-\text{arc ctg }x<\frac{\pi}{2}$

$\rightarrow -\text{arc cos }x<\text{arc ctg }x \;\ldots\ldots(\triangle)$

Graficando para $x\in[-1,1]$



Observamos que $(\triangle)$ se verifica :
$\forall x \in [-1,1]$

$\therefore$ C.S $= [-1,1]$

Comparando : $\begin{matrix} a = -1 \\ b = 1 \end{matrix} \rightsquigarrow a^2 + b^2 = 2$

Rpta: **D**

24. Sea la función : $f(x) = \text{arc}\cos x + \text{arc}\cot x$ cuyo rango es $[m, M]$.
Determine el valor de $\dfrac{M}{m}$

A) 1 B) 3 C) 5
D) 7 E) 9

Solución:
Observación :
Sea : $f_{(x)} = f_{1(x)} + f_{2(x)}$; f_1 ; f_2: funciones crecientes o decrecientes.
Además : $a_1 \leq f_{1(x)} \leq a_2$
$b_1 \leq f_{2(x)} \leq b_2$
$\rightsquigarrow a_1 + b_1 \leq f_{(x)} \leq a_2 + b_2$
$f_{(x)} = \text{arc}\cos x + \text{arc ctg}\, x$

- Dominio : $x \in [-1,1] \wedge x \in \mathbb{R} \rightsquigarrow x \in [-11]$
- Rango :

Si $x \in [-1,1]$ $\begin{cases} 0 \leq \text{arc}\cos x \leq \pi \\ \dfrac{\pi}{4} \leq \text{arc ctg} x \leq \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$

como arc cos x y arc ctg x son decrecientes en $[-1,1]$ por la obs.

$\rightsquigarrow \dfrac{\pi}{4} \leq \underbrace{\text{arc cos x + arac ctg x}}_{f(x)} \leq \dfrac{7\pi}{4}$

$\therefore R(f) = \left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{7\pi}{4}\right]$

Comparando : $m = \dfrac{\pi}{4}$ $\rightsquigarrow \dfrac{M}{m} = 7$
$M = \dfrac{7\pi}{4}$

Rpta: **D**

25. Cuántos valores de $x \in \left\langle -\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2} \right\rangle$ satisfacen la ecuación:

$$6\text{sen}(2x) - 8\cos x + 9\text{sen}x - 6 = 0$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

Solución:

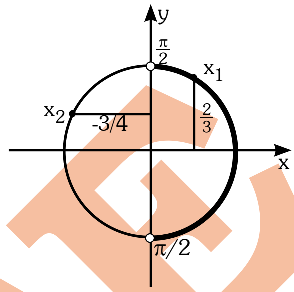
$\underline{6\text{sen}2x} - 8\cos x + 9\text{sen}x - 6 = 0$

$12\text{sen}x\cos x - 8\cos x + 9\text{sen}x - 6 = 0$
Factorizando :
$4\cos x(3\text{sen}x - 2) + 3(3\text{sen}x - 2) = 0$

$\rightsquigarrow (3\text{sen}x - 2)(4\cos x + 3) = 0$

$\rightsquigarrow \text{sen}x = \dfrac{2}{3} \quad \vee \quad \cos x = -\dfrac{3}{4}$

Graficando en la C.T. $x \in \left\langle -\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2} \right\rangle$



$\therefore$ Solo un valor en $\left\langle -\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2} \right\rangle$ satisface la ecuación.

Rpta: **A**

26. En un triángulo acutánguo ABC. Calcule el valor de:
$$E = \frac{\cos(A-B)}{\text{sen}A \cdot \text{sen}B} + \frac{\cos(B-C)}{\text{sen}B \cdot \text{sen}C} + \frac{\cos(A-C)}{\text{sen}A \cdot \text{sen}C}$$

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 8

Solución:
Sabemos :
$\dfrac{\cos(x-y)}{\text{sen}x\ \text{sen}y} = 1 + \text{ctg}x\ \text{ctg}y \quad \ldots\ldots (*)$

$E = \dfrac{\cos(A-B)}{\text{sen}A\ \text{sen}B} + \dfrac{\cos(B-C)}{\text{sen}B\ \text{sen}C} + \dfrac{\cos(A-B)}{\text{sen}A\ \text{sen}C}$

Usando $(*)$
$E = 1 + \text{ctg}A\ \text{ctg}B + 1 + \text{ctg}B\ \text{ctg}C + 1 + \text{ctg}A\ \text{ctg}C$
como : $A + B + C = 180^o$
$\rightsquigarrow \text{ctg}A\ \text{ctg}B + \text{ctg}B\ \text{ctg}C + \text{ctg}A\ \text{ctg}C = 1$
Reemplazando : $E = 4$

Rpta: **B**

27. Sea :
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = \cos^2 t, y = \text{sen}^2 t; t \in \mathbb{R}\}$$
Entonces podemos afirmar que:

A) A es una semicircunferencia
B) A es un segmento de recta
C) A es una semielipse
D) A es una recta
E) A es un segmento de parábola

Solución:

Sabemos : $\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1;\ \forall\, t \in R$

Remplazando : $y + x = 1$

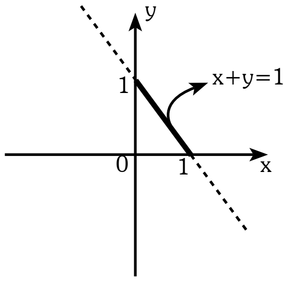
Además : $*\ \ 0 \le y \le 1$

$*\ \ 0 \le x \le 1$

Tabulando :

t	(x; y)
0	(1;0)
$\frac{\pi}{2}$	(1;0)
π	(0;1)
$\frac{3\pi}{2}$	(0;1)
2π	(0;1)

Graficando :



Rpta: **B**

28. En un triángulo ABC recto en A, el valor de la expresión:

$$E = \frac{(a-b)^2 + 4ab\,\text{sen}^2\left(\frac{C}{2}\right)}{(a+b)^2 - 2bc\,\cot\left(\frac{C}{2}\right)}$$

donde a, b y c son los lados del triángulo, es igual a:

A) -2 B) -1 C) 1
D) 2 E) 4

Solución:

Obs:

$2\text{sen}^2 x = 1 - \cos 2x$

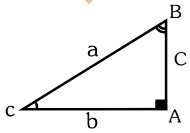
$\text{ctg}\frac{x}{2} = \csc x + \text{ctg} x$

Piden:

$$E = \frac{(a-b)^2 + 2ab\left(2\text{sen}^2\frac{c}{2}\right)}{(a+b)^2 - 2bc\ \ \text{ctg}\frac{c}{2}}$$

De la observación:

$$E = \frac{(a-b)^2 + 2ab(1-\cos C)}{(a+b)^2 - 2bc\,(\csc C + \text{ctg}\, C)}$$



Reemplazar:

$$E = \frac{(a-b)^2 + 2ab\left(1 - \frac{b}{a}\right)}{(a+b)^2 - 2bc\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)}$$

$$E = \frac{a^2 + b^2 - \cancel{2ab} + \cancel{2ab} - 2b^2}{a^2 + b^2 + \cancel{2ab} - \cancel{2ab} - 2b^2}$$

Simplicando:

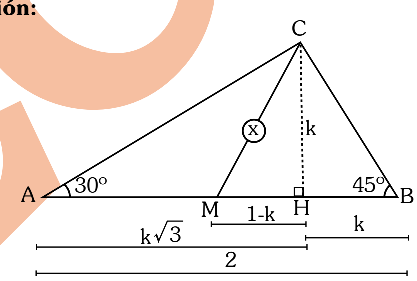
$\therefore E = 1$

Rpta: **C**

29. En un triángulo ABC, el lado $\overline{AB}$ mide 2cm, $m\angle A = 30^o$ y $m\angle B = 45^o$. Calcule la longitud (en cm) de la mediana relativa al lado $\overline{AB}$

A) $\sqrt{11-6\sqrt{3}}$ B) $\sqrt{11-5\sqrt{3}}$
C) $\sqrt{11-4\sqrt{3}}$ D) $\sqrt{11-3\sqrt{3}}$
E) $\sqrt{11-2\sqrt{3}}$

Solución:



$*\ \ k\sqrt{3} + k = 2 \longrightarrow k = \sqrt{3} - 1$

$*$ MHC: T. Pitágoras

$x^2 = (1-k)^2 + k^2$

$x = \sqrt{2k^2 - 2k + 1}$

$x = \sqrt{11 - 6\sqrt{3}}$

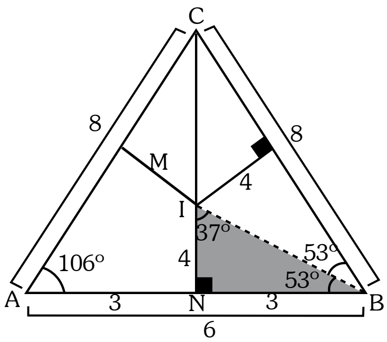
Rpta: **A**

30. ABC es un triángulo isósceles (AC = BC). I es el incentro del triángulo. Si : AB = 6 cm, AC = 8 cm, la distancia de I al lado $\overline{BC}$ es 4 cm y la prolongación de $\overline{BI}$ corta a $\overline{AC}$ en M, calcule la longitud (en cm) de $\overline{BM}$

A) $\frac{44}{7}$ B) $\frac{55}{7}$ C) $\frac{57}{7}$
D) $\frac{60}{7}$ E) $\frac{65}{7}$

Solución:

Dato : I : Incentro del $\triangle$ ABC
$\Rightarrow$ IM = 4 (Inradio)



- $\triangle$ IMB notable de 37° y 53°

  $\Rightarrow m\sphericalangle ABC = 106°$

- $\triangle$ ABC es isosceles :

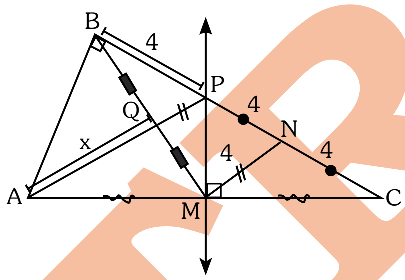
  $\Rightarrow m\sphericalangle CAB = m\sphericalangle ABC = 106°$

- Luego el problema está mal propuesto porque es imposible que en un triángulo dos ángulos sean obtusos.

31. En un triángulo ABC, la mediatriz relativa al lado $\overline{AC}$ interseca a $\overline{BC}$ en P. $\overline{AP}$ y $\overline{BM}$ se intersecan en Q. Determine AQ (en cm), si MQ = QB y BP = 4 cm.

A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 10

Solución:



* Trazamos $\overline{MN}//\overline{AP} \Longrightarrow \boxed{NP = NC}$

* Por mediana relativa a $\overline{PC}$:

$\boxed{MN = NP = NC}$

Pero: BP = PN $\Longrightarrow$ NP = 4

* En el $\triangle$BMN (por base media)

$\boxed{QP = 2}$

* En el $\triangle$APC (por base media)

x+2 = 8

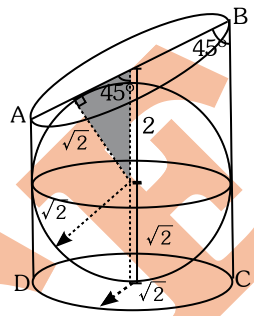
$\therefore$ x = 6

Rpta: **C**

32. Un tronco de cilindro circular recto se encuentra circunscrito a una esfera de radio $r = \sqrt{2}$ cm, el eje $\overline{AB}$ de la elipse forma un ángulo de 45° con la generatriz máxima $\overline{BC}$. Calcule el volumen (en cm^3) del tronco de cilindro.

A) $2\pi(2+\sqrt{2})$ B) $2\pi(1+\sqrt{2})$
C) $\pi(2+\sqrt{2})$ D) $2\pi(2-\sqrt{2})$
E) $2\pi(\sqrt{2}-1)$

Solución:



Vol tronco de cilindro $= \pi(\sqrt{2})^2.\text{eje} = \pi.2(2+\sqrt{2})$

$\therefore$ Vol tronco de cilindro $= 2\pi(2+\sqrt{2})$

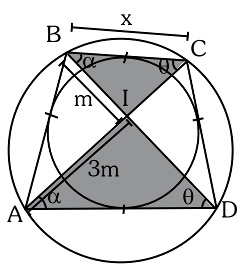
Rpta: **A**

33. ABCD es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de radio r y circunscrito a una circunferencia de radio R. Si $\overline{BD}$ interseca a $\overline{AC}$ en I. 3BI = AI y AB+CD=a cm (a > 0), calcule la longitud (en cm) de $\overline{BC}$

A) $\frac{a}{2}$ B) $\frac{a}{3}$ C) $\frac{a}{4}$

D) $\frac{a}{5}$ E) $\frac{a}{6}$

Solución:



* $\triangle$BIC ~ $\triangle$AID:

$\frac{m}{3m} = \frac{x}{AD} \longrightarrow AD = 3x$

* T. Pitot:

$$\underbrace{AB + CD}_{a} = BC + AD$$
$$a = x + 3x$$
$$x = \frac{a}{4}$$

Rpta: **C**

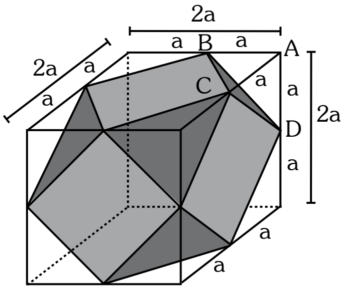
34. En un exaedro regular los puntos medios de sus aristas son los vértices de un poliedro.
Determine la relación :

$$\frac{\text{volumen del poliedro}}{\text{volumen del exaedro}}$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$

D) $\frac{5}{6}$ E) 2

Solución:



$$V_{hexaedro} = (2a)^3 = 8a^3$$

$$V_{poliedro} = V_{hexaedro} - 8V_{A-BCD} = 8a^3 - 8\left(\frac{1}{3}.\frac{a^2}{2}.a\right)$$

$$V_{poliedro} = 8a^3 - \frac{8}{6}a^3 = \frac{40}{6}a^3 = \frac{20}{3}a^3$$

$$\therefore \frac{V_{poliedro}}{V_{hexaedro}} = \frac{\frac{\cancel{20}^{5}}{3}\cancel{a^3}}{\cancel{8}_{2}\cancel{a^3}} = \frac{5}{6}$$

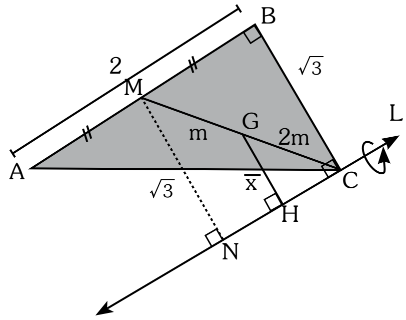
Rpta: **D**

35. L es una recta que contiene un punto C, ABC es un triángulo rectángulo (recto en B) cuyo cateto $\overline{AB}$ es paralelo a la recta L. Si BC = $\sqrt{3}$ cm AB = 2cm, entonces el volumen (en cm^3) del sólido de revolución que se obtiene al girar e triángulo alrededor de L es:

A) 2π B) $\frac{5\pi}{2}$ C) 3π

D) $\frac{7\pi}{2}$ E) 4π

Solución:



* Por semejanza:

$\triangle CMN \sim \triangle CGH$

$$\frac{\bar{x}}{\sqrt{3}} = \frac{2m}{3m}$$

$$\bar{x} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

* Por teorema de Pappus

$$V_{\triangle ABC} = 2\pi\,\bar{x}.\underbrace{\text{Área}_{\triangle ABC}}$$

$$V_{\triangle ABC} = 2\pi\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)\left(\frac{2.\sqrt{3}}{2}\right)$$

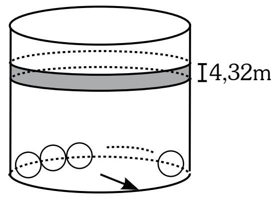
$$\boxed{V_{\triangle ABC} = 4\pi}$$

Rpta: **E**

36. En un depósito cilíndrico de radio 5 m. que contiene cierta cantidad de agua; se introducen 24 bolas esféricas de igual radio. Si el nivel del agua se incrementa en 4,32 m, entonces el diámetro (en m) de las bolas es :

A) 3,0 B) 3,2 C) 3,4
D) 3,6 E) 3,8

Solución:



Volumen del cuerpo sumergido = Volumen del líquido desplazado

$$24.\frac{4}{3}\pi r^3 = \pi.5^2.4,32$$

$$r = \frac{3}{2}$$

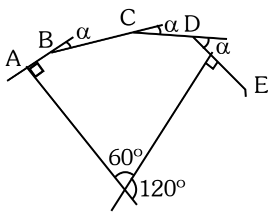
Nos piden: diámetro = 3,0

Rpta: **A**

37. Hallar el número de diagonales de un polígono regular ABCDE... sabiendo que las mediatrices de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ forman un ángulo de 60°.

A) 90 B) 105 C) 120
D) 135 E) 150

Solución:



En el polígono sombreado: (Suma de ángulos externos)

$\alpha + \alpha + \alpha + 90 + 90 + 120 = 360$

$3\alpha + 300 = 360° \Longrightarrow \boxed{\alpha = 20°}$

Por $m\measuredangle ext = 20° = \dfrac{360}{n} \Longrightarrow n = 18$

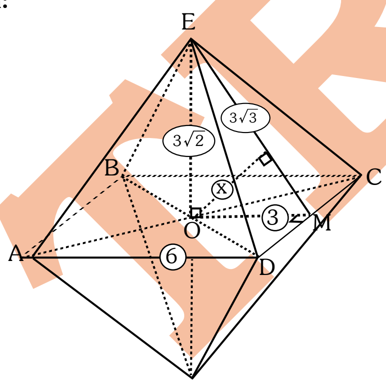
$\therefore \#$ diagonales $= \dfrac{n(n-3)}{2} = \dfrac{18.(15)}{2} = 135$

Rpta: **D**

38. La arista de un octaedro regular mide 6 m. Calcule la distancia (en m) del centro del octaedro a una cara.

A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{6}$ C) $\sqrt{7}$
D) $\sqrt{8}$ E) 3

Solución:



* OM = 3
* EO = $3\sqrt{2}$
* EM = $3\sqrt{3}$

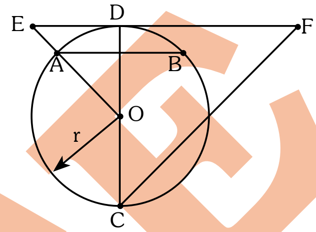
⊿EOM por relaciones métricas

$3.\sqrt{3}.x = 3\sqrt{2}.3$

$x = \sqrt{6}$

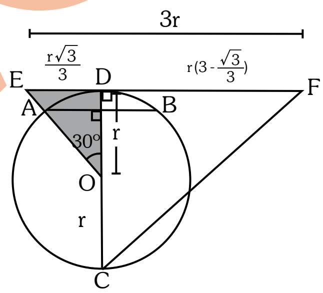
Rpta: **B**

39. En la figura, $\overline{AB}$ es el lado de un exágono regular inscrito en la circunferencia de centro O. El diámetro $\overline{CD}$ es perpendicular a $\overline{AB}$ y D es punto de tangencia. Si EF = 3 r. Determine el valor de $\dfrac{CF}{\ell \overset{\frown}{CD}}$ $(\pi = 3,14)$



A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1
D) $\frac{3}{2}$ E) 2

Solución:



⊿CDF: Pitágoras:

$(CF)^2 = (2r)^2 + \left(r\left(3 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)^2$

$CF = r\sqrt{4 + \left(3 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$

Nos piden: $\dfrac{CF}{\ell \overset{\frown}{CD}} = \dfrac{\cancel{r}\sqrt{4 + \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}}{\pi \cancel{r}}$

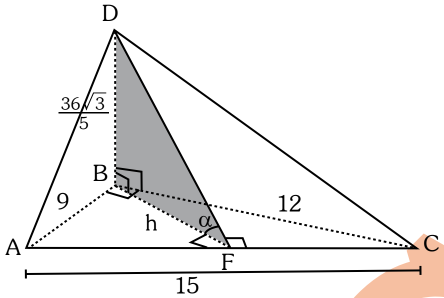
$\dfrac{CF}{\ell \overset{\frown}{CD}} \approx 1$

Rpta: **C**

40. Por el vértice B de un triángulo rectángulo ABC (recto en B). Se traza $\overline{BD}$ perpendicular al plano ABC, el punto D se une con las vértices A y C. Si AB = 9u, BC = 12u y BD = $\frac{36\sqrt{3}}{5}$u , entonces la medida del diedro AC (en grado sexagesimales) es:

A) 37 B) 45 C) 53
D) 54 E) 60

Solución:
Graficando:



1. En el ⊿ABC, por R.M.:
$\overset{5}{\cancel{15}} \cdot h = 9 \cdot \overset{4}{\cancel{12}}$
$h = \frac{36}{5}$
2. En el ⊿DBF: NOT (30° y 60°)
3. Por lo tanto: $\boxed{\alpha = 60°}$

Rpta: **E**