# MATEMÁTICA PARTE 1

## Pregunta 01

Sea A una matriz cuadrada de orden $2 \times 2$, si se sabe que su determinante es $\Delta$ y la traza de la matriz $A^2$ es T.

Determine el valor $[\text{traza }(A)]^2$

A) $T + \Delta$
B) $T^2 + 2\Delta$
C) $2\Delta + T$
D) $\Delta + 2T$
E) $\Delta^2 + 2T$

## Resolución 01

### Matrices

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & d^2+bc \end{pmatrix}$$

Se tiene:

$|A| = \Delta = ad - bc$ .... (1)

$\text{Traz}(A^2) = T = a^2 + d^2 + 2bc$ .... (2)

Piden:

$$[\text{Traz}(A)]^2 = (a+d)^2 = \underbrace{a^2+d^2}_{(T-2bc)} + 2\underbrace{ad}_{(\Delta+bc)}$$

$$= (T-2bc) + 2(\Delta+bc)$$

$$= T - \cancel{2bc} + 2\Delta + \cancel{2bc}$$

$$= T + 2\Delta$$

**Clave: C**

## Pregunta 02

Sea f: R→R una función tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in R$, y sea $a \in R$.

Si f satisface:

$|a-2|\,(f(x))^2 - a^2 f(x) \leq |f(x)|$ para todo $x \in R$. Determine el conjunto de todos los valores de a que garantizan que la función f sea acotada.

A) $\{2\}$
B) $\{4\}$
C) $R \setminus \{2\}$
D) $R \setminus \{4\}$
E) R

## Resolución 02

### Funciones

I. Para: $f(x)>0$

$|a-2|f(x) - a^2 \leq 1 \rightarrow |a-2|f(x) \leq a^2+1$

II. Para: $f(x)<0$

$|a-2|f(x) - a^2 \geq -1 \rightarrow |a-2|f(x) \geq a^2-1$

$\Rightarrow a^2-1 \leq |a-2|f(x) \leq a^2+1$

$$\frac{a^2-1}{|a-2|} \leq f(x) \leq \frac{a^2+1}{|a-2|} \; ; \; a \neq 2$$

"f" es acotada, $\forall a \in R \setminus \{2\}$

**Clave: C**

### Pregunta 03

Sean a,b,c∈R tales que 0<b<1 y a<c, determine los valores de verdad o falsedad de las siguientes proposiciones señalando la alternativa correcta.

I. $b^a > b^c$

II. $\log_b(a) > c$, si $a > b^c$

III. $\log_b(a) > \log_b(c)$

A) VVV
B) VFV
C) VFF
D) FFV
E) FVF

### Resolución 03

#### Función Logaritmo y Exponencial

Si: 0 < b < 1; las funciones logaritmo y exponencial son decrecientes.

Luego:

I. Si: $a<c \rightarrow b^a>b^c$ .................................. (V)

II. Si: $a>b^c \rightarrow \log_b a<c$ ............................. (F)

III. Si: $a<c \rightarrow \log_b a > \log_b c$ ..................... (V)

**Clave: B**

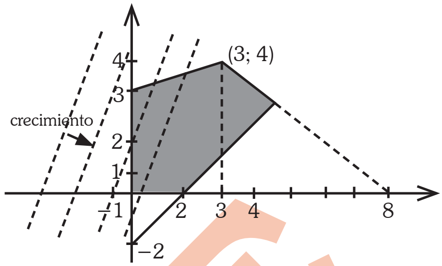
### Pregunta 04

La región admisible S y el crecimiento de la función objetivo del problema,

maximizar f(x;y)

s.a. (x, y) ∈ S

se muestra en la siguiente figura:




Si $(\bar{x}, \bar{y})$ es la solución del problema, determine $f(\bar{x}, \bar{y})$

A) $\frac{10}{3}$

B) $\frac{14}{3}$

C) $\frac{20}{3}$

D) $\frac{25}{3}$

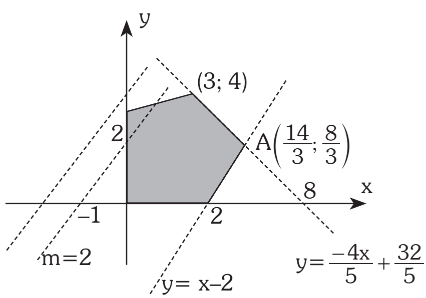
E) $\frac{28}{3}$

### Resolución 04

#### Programación lineal

Función objetivo:

$$F(x; y) = mx + by$$




m=2 F(x; y)= 2x–y

Evaluando en el punto A:

$$F\left(\frac{14}{3};\frac{8}{3}\right)=\frac{20}{3}$$

**Clave: C**

### *Pregunta 05*

El conjunto solución de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas x, y, z es:

$$\left\{(x;y;z)/\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{3}\right\}$$

Si el punto (3, −2, 5) pertenece al plano cuya ecuación lineal es una de las ecuaciones del sistema, y tiene la forma ax + by + cz= 15.

Determine dicha ecuación.

A) 23x + y − 11z= 15
B) −23x – y + 22z= 11
C) − 23x + 13y + 22z= 15
D) 23x − 22y − z= –11
E) −23x + 22y + 11z= 10

### *Resolución 05*

**Sistemas**

$$CS=\left\{(x,y,z)/\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{3}\right\}=\{4t+2;2t+3;3t+1\}$$

En la ec. lineal: ax + by + cz= 15 (plano)

Se tiene: $P_0$= (3, –2, 5) pertenece al plano.

También:

si: t= 0 → $P_1$= (2, 3, 1);

t= –1 → $P_2$= (–2, 1, –2)

Reemplazando $P_0$ ; $P_1$ ; $P_2$ en el plano:

$$\Rightarrow\begin{cases}3a-2b+5c=15\\2a+3b+c=15\\-2a+b-2c=15\end{cases}$$

Se obtiene: a= –23 ; b= 13 ; c= 22

∴ –23x + 13y + 22z= 15

**Clave: C**

### *Pregunta 06*

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones. Diga cuál de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

I. Si para algún

$k\in N$: $\sum_{i=1}^{k}|a_i\,b_i|=0$, entonces

$a_i=0\ \forall_i\in\{1,......,k\}$

o $b_i=0,\ \forall i\in\{1,......,k\}$

II. Si para algún $k\in N$: $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|=0$

entonces $\sum_{i=1}^{k}|a_i\,b_i|=0$

III. Si $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|\le M$ y $\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|\le M$,

entonces $\sum_{i=1}^{k}|a_i\,b_i|\le M^2,\ \forall k\in N$

A) Solo II
B) Solo III
C) I y II
D) II y III
E) I, II y III

### *Resolución 06*

**Sucesiones y Series**

Sea $|x_1|+|x_2|+|x_3|+\ldots+|x_n|=0$

En R se verifica solo si $x_1=x_2=x_3=\ldots=x_k=0$

I. $|a_1b_1|+|a_2b_2|+\ldots+|a_kb_k|=0$

$$a_1b_1 = a_2b_2 = \ldots = a_kb_k = 0 \begin{cases} a_i = 0 \\ \vee \\ b_i = 0 \end{cases}$$

II. $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0 \rightarrow a_i = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{k} |a_ib_i| = 0$

III. $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_k| \leq M$
$|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_k| \leq M$

Multiplicando y aplicando la propiedad transitiva

$$\sum_{i=1}^{k} |a_ib_i| \leq M^2$$

**Clave: E**

## *Pregunta 07*

Sea $S_n(x) = x + x^2 + \ldots + x^n$, $x \in R$, $n \in N$

Determine el valor de $S_n\left(\frac{3}{2}\right) - S_n\left(\frac{1}{2}\right)$

A) $3\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$

B) $3\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n - 4$

C) $3\left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$

D) $3\left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n - 4$

E) $3\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{3}{2}\right)^n + 4$

## *Resolución 07*

### Sumatorias

$$S_{n(x)} = x\left(\frac{x^n - 1}{x - 1}\right)$$

Entonces

$$S_{n\left(\frac{3}{2}\right)} - S_{n\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{2}\left[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\left(\frac{3}{2}\right) - 1}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{2}\right) - 1}\right]$$

$$= 3\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n - 4$$

**Clave: B**

## *Pregunta 08*

Sean f, g y h funciones reales de variable real.

Dadas las siguientes proposiciones :

I. $h_o\,(f+g) = h_of + h_og$

II. Si $Dom(f) = Dom(g) = R$, entonces $Dom\,(f_og) = R$

III. $(f_og)\,_oh = f_o(g_oh)$

Señale la alternativa que presenta la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F):

A) VVV

B) VFV

C) FVV

D) FVF

E) FFF

## *Resolución 08*

### Funciones

I. La función compuesta no verifica la propiedad distributiva .................... (F)

II. Dom fog: $x \in Dg \wedge g(x) \in Df$ ........ (V)
$\mathbb{R} \cap \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}$

III. $(fog)oh = fo(goh)$ La función compuesta verifica la propiedad asociativa ...... (V)

**Clave: C**

### Pregunta 09

Un número de cuatro cifras en base 7 se representa en base decimal por $\overline{49d}$. Calcule el valor máximo de la suma de las cifras de dicho número.

A) 10
B) 11
C) 12
D) 13
E) 14

### Resolución 09

**Numeración**

Sea el número: $\overline{xyzw}_{(7)}$

Dato:

$$\underbrace{\overline{xyzw}_{(7)}} = \underbrace{\overline{49d}}$$

$$\overset{\circ}{7}+w = \overset{\circ}{7}+d$$

$$w = \overset{\circ}{7}+d$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$(\text{máx})\ 6 \qquad 6$$

luego: $\overline{xyz6}_{(7)}=496$

$$\downarrow$$

$$\overline{xyz6}_{(7)}= 1306_{(7)}$$

piden: $x+y+z+w= 1+3+0+6$

$= 10$

**Clave: A**

### Pregunta 10

Sean n, m∈**Z** tal que n+m y n–m son los menores cuadrados perfectos distintos.

Si n= 2m + 1, calcule el valor de 3m–n

A) –1
B) 0
C) 1
D) 4
E) 7

### Resolución 10

**Teoría de números**

$n; m \in \mathbb{Z}$ /

$$\begin{array}{r} n + m = k^2 \\ n - m = r^2 \\ \hline 2n = k^2 + r^2 \end{array} \ (+)$$

$$n= \frac{k^2+r^2}{2} \ \wedge \ m= \frac{k^2-r^2}{2}$$

como: $n= 2m + 1$

$$\frac{k^2+r^2}{2} = k^2 - r^2 + 1$$

$$3r^2= k^2 + 2$$

Esto se cumple si y solo si

$$\boxed{k = \overset{\circ}{3} \pm 1}$$

Los menores valores que cumplen esta relación son:

$(k; r)= \{(1; 1), (1; –1), (–1; 1), (–1; –1), (5; 3), (5; –3)...\}$

$(n; m)= \{(1; 0), (17; 8), ...\}$

como $k^2 \neq r^2 \ \wedge \ n= 2m + 1$

$\Rightarrow (n; m)= (17; 8)$

$3m – n= 3(8) – 17= 7$

**Clave: E**

### *Pregunta 11*

Jorge decide montar un gimnasio y utiliza 5000 nuevos soles para comprar 40 aparatos entre bicicletas, colchonetas y máquinas de remo. Si los precios unitarios son 150; 80; 300 nuevos soles respectivamente. ¿Cuántos aparatos entre bicicletas y máquinas de remo compra?

A) 15
B) 16
C) 20
D) 24
E) 25

### *Resolución 11*

**Divisibilidad**

Cantidad de bicicletas: B

Cantidad de colchonetas: C

Cantidad de máquinas de remo: M

Del dato:

$$B + C + M = 40 \quad (\times 80)$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 150B & + & 80C & + & 300M & = & 5000 \\ 80B & + & 80C & + & 80M & = & 3200 \quad (-) \\ \hline 70B & + & 0 & + & 220M & = & 1800 \end{array}$$

Luego:

$$7B + 22M = 180 \qquad \boxed{M = \overset{o}{7} + 5}$$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ \boxed{10} & \boxed{5}\ \surd \\ -12 & 12\ \times \end{array}$$

Piden: $B + M = 10 + 5$

$= 15$

**Clave: A**

### *Pregunta 12*

Se tienen las siguientes afirmaciones:

I. Dos enteros no nulos a y b son primos entre sí, si y solo si existen enteros m y n tal que ma + nb= 1.

II. Sean a y b dos enteros positivos, entonces a y (ab + 1) son primos entre sí.

III. Si a y b son primos entre sí, entonces ab y $(a^n + b^m)$son primos entre sí, donde m y n son enteros positivos.

¿Cuál de las alternativas es la correcta?

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo I y II
E) I, II y III

### *Resolución 12*

**Teoría de números**

I. $\{a; b\} \subset \mathbb{Z} - \{0\}$

(a,b) son P.E.SI $\Leftrightarrow$ $\underline{\text{MCD }(a, b)= 1}$

como el MCD de dos enteros se puede expresar como una combinación lineal de dichos números entonces:

$ma + nb= 1$, con $m \wedge n \in \mathbb{Z}$ (V)

II. $\{a; b\} \subset \mathbb{Z}^{(+)}$, entonces a y (ab+1) son P.E.SI verdadero ya que MCD(a; ab+1)= 1 (V)

III. Si a y b son P.E.SI $\Rightarrow$ ab y $(a^n + b^m)$ son P.E.SI (V)

**Clave: E**

### Pregunta 13

Halle la suma de los siguientes números:

$n_1 = 1{,}3125;\ n_2 = \dfrac{21}{16};\ n_3 = 1{,}\overset{\frown}{36}$

$n_4 = 1 + \dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{10^2} + \dfrac{2}{10^3} + \dfrac{5}{10^4}$

A) $\dfrac{322}{111}$

B) $\dfrac{647}{113}$

C) $\dfrac{787}{147}$

D) $\dfrac{933}{176}$

E) $\dfrac{987}{181}$

### Resolución 13

**Números Racionales**

$\bullet n_1 = 1{,}3125 = 1 + \dfrac{3125}{10000} = 1 + \dfrac{5}{16} = \dfrac{21}{16}$

$\bullet n_2 = \dfrac{21}{16}$

$\bullet n_3 = 1{,}\overset{\frown}{36} = 1 + \dfrac{36}{99} = 1 + \dfrac{4}{11} = \dfrac{15}{11}$

$\bullet n_4 = 1 + \dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{10^2} + \dfrac{2}{10^3} + \dfrac{5}{10^4} = 1 + \dfrac{3125}{10000} = \dfrac{21}{16}$

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = \frac{21}{16} + \frac{21}{16} + \frac{21}{16} + \frac{15}{11}$$

$$= \frac{63}{16} + \frac{15}{11}$$

$$= \frac{933}{176}$$

**Clave: D**

### Pregunta 14

Si N y M son dos números enteros de tres cifras de manera que el primero más sus dos quintas partes es un cubo perfecto, al segundo se le suma su mitad para formar un cuadrado perfecto y además M + N < 500. Entonces el mayor valor de M+N es

A) 315

B) 361

C) 395

D) 461

E) 495

### Resolución 14

Dato:

$N + \dfrac{2}{5}N = k^2$

$\dfrac{7N}{5} = k^2$

$\therefore N = 5.7^2.a^3$

$N = 245.a^3$, $a \to 1$

N= 245

$M + \dfrac{M}{2} = q^2$

$\dfrac{3M}{2} = q^2$

$\therefore M = 2.3b^2$

$M = 6b^2$

Además:

N+M < 500

$245 + 6b^2 < 500$

$6b^2 < 255$

$b^2 < 42{,}5$, $b \to 6$

$M = 6(6)^2 = 216$

Piden:

$M+N = 216 + 245$

$= 461$

**Clave: D**

### Pregunta 15

Un producto se vende al mismo precio en dos tiendas.

a) En la tienda X, se hacen descuentos sucesivos, primero del 15% luego del 15% y finalmente del 20%.

b) En la tienda Y se hacen descuentos sucesivos del 10% y luego del 40%.

El dueño desea vender el producto en ambas tiendas al mayor precio.

Determine la tienda en la que se debe incrementar el precio y en cuanto.

DAR LA RESPUESTA MÁS PRÓXIMA

A) X; 7,03%
B) X; 7,04%
C) Y; 7,03%
D) Y; 7,04%
E) Y; 7,40%

***Resolución 15*** ***15***

**Tanto por ciento**

***Tienda "x"***

$$\begin{array}{lcccc} & -15\% & -15\% & -20\% \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{Queda} = & \dfrac{85}{100} & \cdot\ \dfrac{85}{100} & \cdot\ 80\% \end{array}$$

$$= 57{,}8\%$$

***Tienda "y"***

$$\begin{array}{lcc} & -10\% & -40\% \\ \text{Queda} = & \dfrac{90}{100} & \cdot\ 60\% \end{array}$$

$$= 54\%$$

La tienda "y" debe incrementar el precio.

$54\% \times (100 + a)\% = 57{,}8\%$

$a = 7{,}037\%$

La respuesta más próxima: 7,04%

* El mayor precio de venta es el de la tienda "x"

**Clave: D**

***Pregunta 16***

En un experimento se obtuvieron n datos $a_1$, $a_2$, ....., $a_n$. Una persona calcula el promedio $M_1$ sobre los n datos obtenidos, una segunda persona observa que en el caso anterior olvidaron sumar el dato $a_i$ y vuelve a calcular el promedio $M_2$ sobre los datos obtenidos; pero una tercera persona nota que esta segunda persona olvidó sumar en esta ocasión el dato $a_k$; si además se sabe que $a_i + a_k = N$. Determine el verdadero promedio.

A) $\dfrac{n(M_1 - M_2) + N}{2n}$

B) $\dfrac{n(M_2 - M_1) + N}{2n}$

C) $\dfrac{n(M_1 + M_2) - N}{2n}$

D) $\dfrac{n(M_1 - M_2) - N}{2n}$

E) $\dfrac{n(M_1 + M_2) + N}{2n}$

***Resolución 16***

**Promedio**

Sea: $a_1 + a_2 + ..... + a_n = A$

- Luego el promedio correcto será: $\dfrac{A}{n}$

De los datos:

- $\dfrac{A - a_i}{n} = M_1$
- $\dfrac{A - a_k}{n} = M_2$ (+)

$$\frac{2A - (a_i + a_k)}{n} = M_1 + M_2$$

$$\frac{2A - N}{n} = M_1 + M_2$$

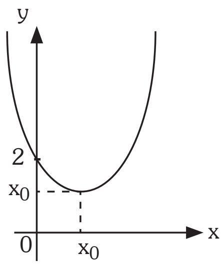
$$A = \frac{n(M_1 + M_2) + N}{2}$$

$$\frac{A}{n} = \frac{n(M_1 + M_2) + N}{2n}$$

**Clave: E**

## Pregunta 17

Dada la gráfica de la función cuadrática f, halle el valor de $x_o$, sabiendo que f tiene el coeficiente del término de mayor grado igual a uno.




A) 1/4
B) 1/2
C) 3/4
D) 1
E) 3/2

## Resolución 17

### Funciones

La función cuadrática:

$$\boxed{f(x) = a(x - x_0)^2 + x_0};$$

se sabe que $a=1 \wedge (0;2) \in f$

$\rightarrow f(0)= 2;$

$$f(0) = x_0^2 + x_0 = 2$$

Reemplazando: $x_0^2 + x_0 - 2 = 0$

$$(x_0 + 2)(x_0 - 1) = 0$$

Del gráfico: $x_0 > 0 \Rightarrow x_0 = 1$

**Clave: D**

## Pregunta 18

Halle el cociente al dividir

$P(x)= 3x^4 + x^3 + x^2 + x - 2$ entre $(x+1)(x-2/3)$

A) $2(x^2 - 1)$
B) $3(x^2+2x)$
C) $4(x^2 + 4)$
D) $3(x^2 + 1)$
E) $3(x^2 - 2)$

## Resolución 18

### Polígonos

Factorizamos P(x): $P(x) = (x+1)\left(x-\frac{2}{3}\right)(3x^2+3)$

Queremos el cociente de dividir:

$$\frac{\cancel{(x+1)\left(x-\frac{2}{3}\right)}(3x^2+3)}{\cancel{(x+1)\left(x-\frac{2}{3}\right)}}$$

$$3(x^2+1)$$

**Clave: D**

## Pregunta 19

Sean p, q, r proposiciones lógicas.

Señale la alternativa que presenta la secuencia correcta, después de determinar si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

I. Si $(p\rightarrow q)\rightarrow r$ y $(p \vee q)\rightarrow r$ son verdaderas, entonces r es verdadera.

II. $p\rightarrow q$ y $p \wedge \sim q$ son proposiciones equivalentes.

III. Si $(p\rightarrow q)\rightarrow r$ y $\sim r\rightarrow q$ son proposiciones falsas, entonces p es verdadera.

A) VVV
B) VVF
C) VFF
D) FVF
E) FFF

### Resolución 19

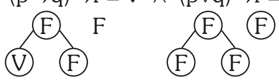
### Lógica proposicional

p, q, r: proposiciones lógicas

I. Si $(p\to q)\to r\equiv V \wedge (p\vee q)\to r\equiv V$, entonces r es verdadero.

Si partimos suponiendo que $r\equiv F$

$(p\to q)\to r\equiv V \;\wedge\; (p\vee q)\to r\equiv V$




,

llegamos a una contradicción

$\therefore\; r\equiv V$

Entonces la proposición es verdadera.

II. $p\to q$ y $p\wedge\sim q$. No son proposiciones equivalentes ya que $p\to q\equiv\sim p\vee q$. Por lo tanto, la proposición es falsa.

III. Si $(p\to q)\to r\equiv F$ y $\sim r\to q\equiv F$ $\quad\therefore\; p\equiv F$


$r\equiv F$

$q\equiv F$

La proposición es falsa.

**Clave: C**

### Pregunta 20

Considerando $m\neq 0$, halle la suma de las soluciones de la ecuación.

$$\begin{vmatrix} a & m & b \\ a & m & x \\ x & m & b \end{vmatrix} = 0 \text{ ; con a, b datos}$$

A) a–b
B) b–a
C) a+b
D) 2a+b
E) a+2b

### Resolución 20

### Determinantes

Realizando operaciones elementales por filas:

$$f_3-f_2\ ;\ f_2-f_1$$

$$\begin{vmatrix} a & m & b \\ 0 & 0 & x-b \\ x-a & 0 & b-x \end{vmatrix} = 0$$

$$\to m(x-a)\,(x-b)=0$$

$$x=a \vee x=b$$

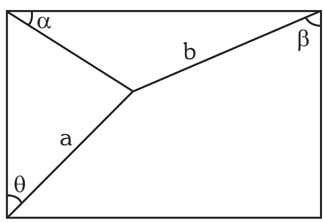
$$\therefore\; \Sigma_{\text{soluciones}}=a+b$$

**Clave: C**

## MATEMÁTICA PARTE 2

### Pregunta 21

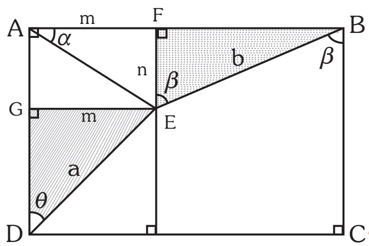
En la figura mostrada, el valor de: $E=\dfrac{a.\text{tg}\alpha.\text{sen}\theta}{b.\cos\beta}$, es:



A) –2
B) –1
C) 1
D) 2
E) 3

### *Resolución 21*

**Razones trigonométricas de un ángulo agudo.**




I. $\triangle$ AFE: $\tan\alpha = \dfrac{n}{m}$

II. $\triangle$ BFE: $\cos\beta = \dfrac{n}{b}$

III. $\triangle$ DGE: $\text{sen}\,\theta = \dfrac{m}{a}$

Reemplazando en: $E = \dfrac{a\tan\alpha.\text{sen}\,\theta}{b\text{Cos}\beta}$

$$E = \frac{a.\frac{n}{m}.\frac{m}{a}}{b.\frac{n}{b}} = 1 \longrightarrow E = 1$$

**Clave: C**

### *Pregunta 22*

Determine la distancia del punto $\left(\frac{1}{4},4\right)$ a la recta $\mathcal{L}$ de ecuación: $y+1 = 2\left(x+\frac{3}{4}\right)$

A) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

B) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

C) $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$

D) $\dfrac{5}{\sqrt{5}}$

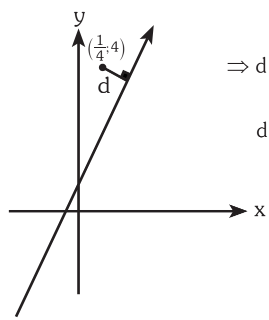
E) $\dfrac{6}{\sqrt{5}}$

### *Resolución 22*

**Ecuación de la recta**

Efectuando operaciones en $\mathcal{L}$:

$\mathcal{L}: 4x - 2y + 1 = 0$




$$\Rightarrow d = \frac{\left|4\left(\frac{1}{4}\right)-2(4)+1\right|}{\sqrt{4^2+(-2)^2}}$$

$$d = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

**Clave: B**

### Pregunta 23

Para $\alpha \in \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$, calcular la variación de $M = \cos^2\alpha - \cos\alpha + 2$

A) $\left[\frac{3}{4}, \frac{7}{4}\right]$

B) $\left[\frac{7}{4}, 3\right]$

C) $\left[\frac{7}{4}, 4\right]$

D) $\left[\frac{9}{4}, 4\right]$

E) $\left[\frac{7}{4}, \frac{9}{4}\right]$

### Resolución 23

**Circunferencia trigonométrica**

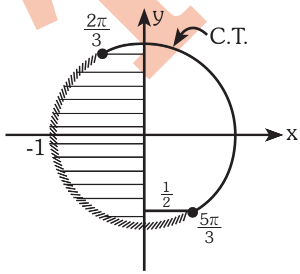
Completando cuadrados:

$$M = \underbrace{\cos^2\alpha - \cos\alpha + \left(\frac{1}{2}\right)^2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2$$

$$M = (\cos\alpha - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}$$

Como $\alpha \in \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$, graficando en la C.T.

Para hallar la variación de cosα.




$$-1 \leq \cos\alpha \leq \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{-1/2} -\frac{3}{2} \leq \cos\alpha - \frac{1}{2} \leq 0$$

$$\longrightarrow \frac{9}{4} \geqslant \left(\cos\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$$

$$\xrightarrow{+7/4} 4 \geqslant \left(\cos\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}$$

$$\therefore M \in \left[\frac{7}{4}; 4\right]$$

**Clave: C**

### Pregunta 24

Si: secx= csc2θ – ctg2θ, determine:

$$E = \frac{\sec^2\theta - tg^2 x}{2 - ctg\theta + \cos x}$$

A) –1

B) 0

C) 1/2

D) 1

E) 3/2

### Resolución 24

**Identidades y Mitad**

$$\sec x = \operatorname{cosec} 2\theta - \cot 2\theta$$

por ∢ mitad: secx= tanθ; también: cosx= cotθ

Trabajando en "E":

$$E = \frac{\sec^2\theta - \tan^2 x}{2 - \cot\theta + \cos x} \to E = \frac{1 + \tan^2\theta - (\sec^2 x - 1)}{2 - \cot\theta + \cos x}$$

$$\to E = \frac{\tan^2\theta - \sec^2 x + 2}{2 - \cot\theta + \cos x}$$

Usando ambas condiciones obtenidas:

$$E=\frac{\cancel{sec^2}x-\cancel{sec^2}x+2}{2-\cancel{cos}x+\cancel{cos}x}\rightarrow E=1$$

**Clave: D**

### *Pregunta 25*

Señale la alternativa que presenta la secuencia correcta, después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F):

I. Si $\arcsen(-x)=-\frac{\pi}{2}$, entonces $x=1$
II. Si $\arccos(-x)=1$, entonces $x=-\pi$
III. Si $x\in[-1,1]$, entonces:

$$\arcsen(-x)+\arccos(-x)=\frac{\pi}{2}$$

A) FFV
B) VVV
C) VVF
D) VFF
E) VFV

### *Resolución 25*

**F. T. inversas**

i) $\underbrace{\text{arc sen}(-x)}_{-\text{arc sen}x=-\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi}{2}\rightarrow x=1$

$\therefore x=\text{sen}\frac{\pi}{2};x=1$ (V)

ii) $\arccos(-x)=1\rightarrow x=-\pi$

según dominio de arc cos.

$-1\le -x\le 1\rightarrow -1\le x\le 1$ en la pregunta para $x=-3{,}14$ no es correcto. (F)

iii) teoría:

$\text{arc sen}(n)+\text{arc cos}(n)=\frac{\pi}{2}$

$\forall n\in[-1,1]$ entonces para

$n=-x$ es verdadero (V)

**Clave: E**

### *Pregunta 26*

Para $1<x<3$ resolver la siguiente inecuación: $\text{sen}(\pi x)-\cos(\pi x)<0$

A) $\left\langle 1,\frac{5}{4}\right\rangle$

B) $\left\langle \frac{5}{4},\frac{9}{4}\right\rangle$

C) $\left\langle \frac{5}{4},\frac{5}{2}\right\rangle$

D) $\left\langle \frac{9}{4},\frac{5}{2}\right\rangle$

E) $\left\langle \frac{9}{4},3\right\rangle$

### *Resolución 26*

**Inecuaciones trigonométricas**

Nota: $a\,\text{sen}x\pm b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\,\text{sen}(x\pm\theta)$

donde: $\theta=\text{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$

$$\underbrace{\text{sen}(\pi x)-\cos(\pi x)}_{\sqrt{2}\,\text{sen}(\pi x-\frac{\pi}{4})<0}<0$$

$$\rightarrow \pi<\pi x-\frac{\pi}{4}<2\pi$$

despejando: $\frac{5}{4} < x < \frac{9}{4}$

$$\therefore x \in \left\langle \frac{5}{4}; \frac{9}{4} \right\rangle$$

**Clave: B**

***Pregunta 27***

Los vértices de un triángulo son:

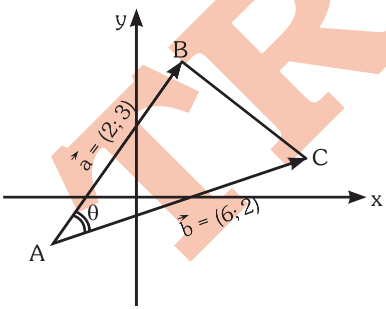
A= (–1,–1); B= (1,2), C= (5,1)

Entonces el coseno del ángulo $B\hat{A}C$ vale:

A) 0,789
B) 0,798
C) 0,879
D) 0,897
E) 0,987

***Resolución 27***

**Plano cartesiano**




Por producto escalar

$$\vec{a}.\vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos\theta$$

$$(2;3).(6;2) = \sqrt{13}\sqrt{40}\cos\theta$$

$$\cos\theta = 0{,}789$$

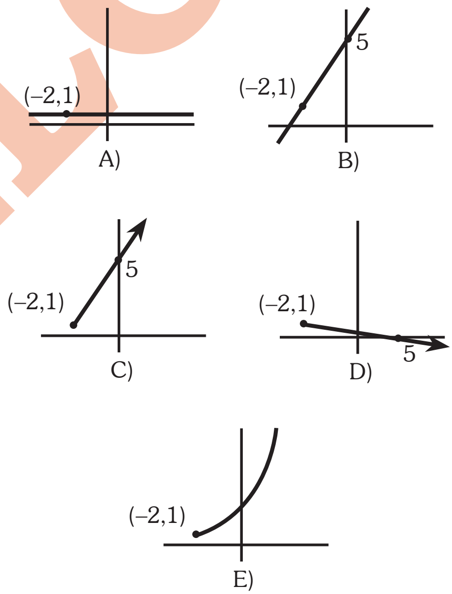
**Clave: A**

***Pregunta 28***

Sea:

$A = \{(x,y) \in R^2 / x = -2+t^2,\ y = 1+2t^2;\ t \in R\}$

Entonces la gráfica que representa a A es:



*Resolución 28*

**Ecuación de la recta**

Las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = -2 + t^2 \\ y = 1 + 2t^2 \end{cases}$$

como: $t \in \mathbb{R}$; $t^2 \geqslant 0$

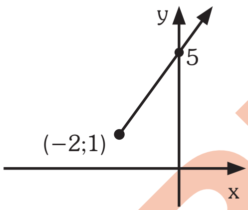
$$\begin{cases} -2 + t^2 \geqslant -2 \longrightarrow x \geqslant -2 \\ 1 + 2t^2 \geqslant 1 \longrightarrow y \geqslant 1 \end{cases}$$

eliminando el parámetro:

$2x - y = -5$

$\rightarrow 2x - y + 5 = 0$ con: $x \geqslant -2$, $y \geqslant 1$

Graficando:




**Clave: C**

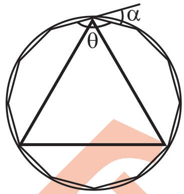
*Pregunta 29*

Tres de las diagonales de un polígono regular forman un triángulo equilátero. Determine la suma de los ángulos internos si se sabe que la medida de su ángulo interno es mayor que 140° pero menor que 156°.

A) 1 440°
B) 1 620°
C) 1 800°
D) 1 980°
E) 2 160°

*Resolución 29*

**Polígonos**




El único que cumple las condiciones:

$\alpha = \dfrac{360°}{12} = 30°$

$\theta = 150°$ $\qquad 140° < \theta < 156°$

El polígono es un dodecágono

$S_i = 180°(12-2)$

$\boxed{S_i = 1\,800°}$

**Clave: C**

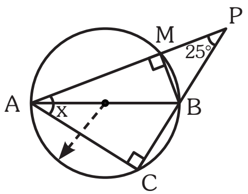
*Pregunta 30*

C es una circunferencia con diámetro $\overline{AB}$ y P es un punto exterior a C. Se trazan los segmentos $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ tal que la prolongación de $\overline{PB}$ corta a la circunferencia en C. Si el ángulo APC mide 25°, calcule la medida del ángulo CAP.

A) 53°
B) 65°
C) 45°
D) 37°
E) 55°

### *Resolución 30*

**Cuadrilátero inscrito**




⏢AMBC inscrito

m∢ACP= m∢AMB= 90°

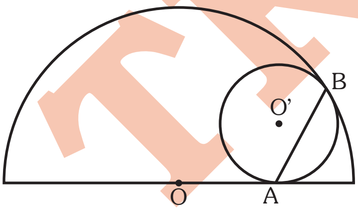
◺ACP: x + 25°= 90°

x= 65°

**Clave: B**

### *Pregunta 31*

En la figura mostrada, O es el centro de la semicircunferencia de radio 12 cm y O' es el centro de la circunferencia de radio 4 cm. Si la circunferencia es tangente en A y B a la semicircunferencia, calcule AB en cm.




A) $2\sqrt{6}$

B) $3\sqrt{3}$

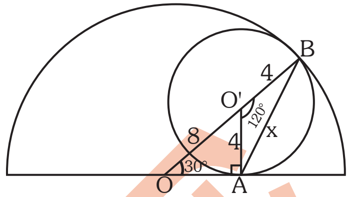
C) $4\sqrt{2}$

D) $4\sqrt{3}$

E) $6\sqrt{2}$

### *Resolución 31*

**Polígonos regulares**




◺OAO' Notable (30°-60°)

m<BO'A=120°

$x = L_3 = R\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

AB= $4\sqrt{3}$ cm

**Clave: D**

### *Pregunta 32*

En un cuadrilátero ABCD,

m∠BAC= 3 m∠ACD,

m∠ABC= m∠ADC= 90°

Si $\overline{AC} \cap \overline{BD}$= {F}, FC= 10m, BD= 9m.

Calcule AF (en metros).

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

### *Resolución 32*

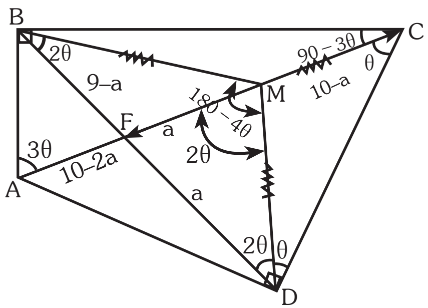
**Relaciones métricas**

Se trazan las medianas $\overline{BM}$ y $\overline{DM}$ de los ◺ABC y ◺ADC respectivamente. △BMD isósceles, si: FM= a, MC= 10–a, △FMD isósceles, FD= a, BF= 9–a

Teorema de cuerdas

(10–2a) (10)= (9–a)a

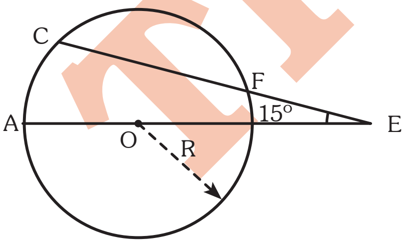
Resolviendo a= 4 ∴ AF= 2




**Clave: B**

*Pregunta 33*

En la figura mostrada, O es centro de la circunferencia cuyo radio mide R unidades. Si AO=FE y m∠CEA= 15°, entonces el área del sector circular AOC es a la longitud de la circunferencia como:




A) $\frac{R}{12}$

B) $\frac{R}{14}$

C) $\frac{R}{15}$

D) $\frac{R}{16}$

E) $\frac{R}{18}$

*Resolución 33*

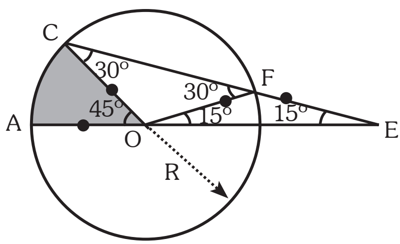
**Área de regiones circulares**

Piden: $\frac{A_{\triangleleft}}{L_o} = ?$

$$A_{\triangleleft\,sector} = \pi R^2\left(\frac{45°}{360°}\right) = \frac{\pi R^2}{8}$$

$$L_o = 2\pi R$$

$$\frac{A_{\triangleleft}}{L_o} = \frac{\frac{\cancel{\pi} R^2}{8}}{2\cancel{\pi} R} = \frac{R}{16}$$




**Clave: D**

### *Pregunta 34*

Desde un punto exterior a un plano se trazan tres oblicuas congruentes de 14 m de longitud, de modo que sus pies son los vértices de un triángulo equilátero cuya área es $\frac{81}{4}\sqrt{3}\,m^2$.

Calcule la distancia del punto al plano.

A) 9

B) 10

C) 11

D) 12

E) 13

### *Resolución 34*

**Geometría del espacio**

Piden: h

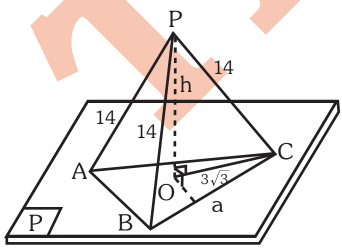
Dato: $A_{\triangle ABC}=\frac{81\sqrt{3}}{4}$

$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{81\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow a=9$

- O: circuncentro del $\triangle ABC$
- $\Rightarrow OC=3\sqrt{3}$
- $\triangle$ POC T. Pitágoras

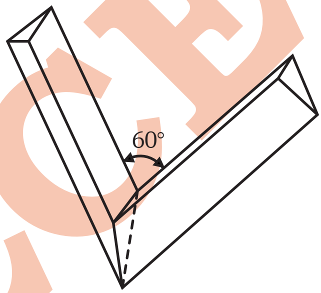
$14^2=h^2+(3\sqrt{3})^2 \;\therefore h=13$




**Clave: E**

### *Pregunta 35*

Se quiere formar la letra "V" con dos troncos iguales de prisma oblicuo de base triangular, con un ángulo de abertura de 60°, tal como se muestra en la gráfica. El área de la base común es de 30 $m^2$ y la suma de las aristas laterales de uno de los troncos es 36 m. Calcule el volumen (en $m^3$) del material necesario para su construcción.




A) 60

B) 120

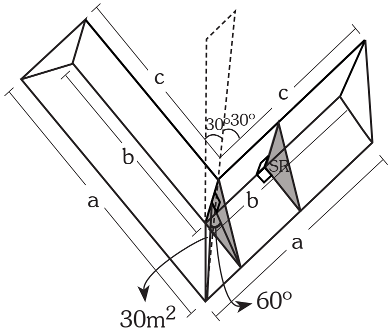
C) 360

D) $360\sqrt{3}$

E) 720

### Resolución 35

#### Tronco de prisma




Piden: $V_{Sólido}$

- $V_{Sólido} = 2\ V_{Tronco}$

  $V_{Sólido} = 2\ A_{SR} \cdot \left(\frac{a+b+c}{3}\right)$

  $A_{SR} = 30 \cdot \cos 60^o$

- Dato: $a + b + c = 36$

  $V_{Sólido} = 2 \cdot 30 \cdot \cos 60^o \cdot \left(\frac{36}{3}\right)$

  $\therefore V_{Sólido} = 360$

**Clave: C**

### Pregunta 36

En un tetraedro regular, determine la medida del ángulo entre las medianas de dos caras, si las medianas no se intersecan.

A) $\text{arc cos}\left(\frac{1}{3}\right)$

B) $\text{arc cos}\left(\frac{2}{3}\right)$

C) $\text{arc cos}\left(\frac{1}{6}\right)$

D) $\text{arc cos}\left(\frac{1}{7}\right)$

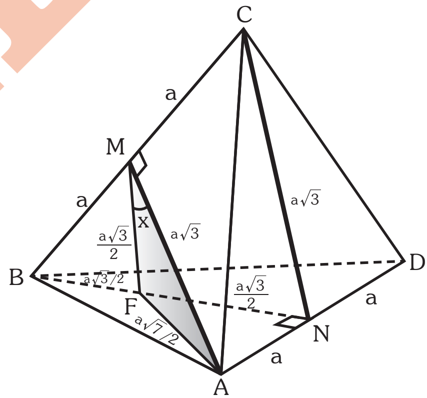
E) $\text{arc cos}\left(-\frac{1}{3}\right)$

### Resolución 36

#### Tetraedro regular

**NOTA: Por condición del problema hay dos casos.**

***1er Caso***




Piden: $\measuredangle\ \overline{AM}$ y $\overline{CN}$

* Sean $\overline{MF} \parallel \overline{CN}$

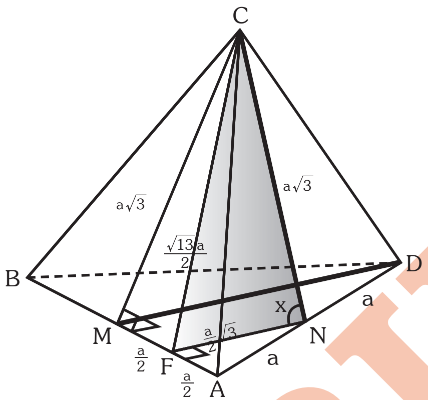
* $\Delta MFA$ (Ley de cosenos)

$$* \left(\frac{a\sqrt{7}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (a\sqrt{3})^2 - 2\frac{a\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{3}.\cos x$$

$$x = \text{arc cos}\left(\frac{2}{3}\right)$$

**Clave: B**

***2do Caso***




Piden: $\measuredangle \overline{CN}$ y $\overline{MD}$

* Sean $\overline{FN} // \overline{MD}$

* $\Delta$CFN (Ley de cosenos)

$$* \left(\frac{\sqrt{13}}{2}a\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 + (a\sqrt{3})^2 - 2\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)(a\sqrt{3})\cos x$$

$$x = \text{arc cos}\left(\frac{1}{6}\right)$$

**Clave: C**

***Pregunta 37***

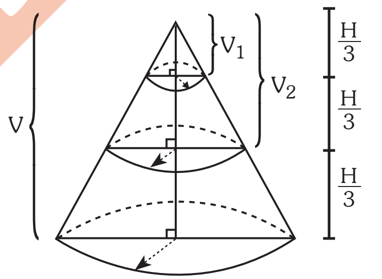
Se tiene un cono circular recto de volumen V y longitud de la altura H. La superficie lateral de este cono se interseca por dos planos paralelos a la base que trisecan a la altura H, obteniéndose conos parciales de volumen $V_1$ y $V_2$ respectivamente ($V_2 > V_1$).

Si V= a$V_1$ + b$V_2$, calcule el cociente $\frac{a}{b}$, SABIENDO QUE a – 2b= 12

A) 8
B) 9
C) 10
D) 11
E) 12

***Resolución 37***

**Geometría del espacio**




Piden: $\frac{a}{b}$

Datos: V= a$V_1$ + b$V_2$

a–2b= 12

**Resolución:**

Por propiedad:

$V_2 = 8V_1 \wedge V = 27V_1$

$\Rightarrow 27\cancel{V_1} = a\cancel{V_1} + b.8\cancel{V_1}$

$27 = a + 8b$

$12 = a - 2b$

$\Rightarrow a = 15\ ;\ b = \dfrac{3}{2}\ ;\ \dfrac{a}{b} = 10$

**Clave: C**

### *Pregunta 38*

En un tetraedro regular de arista "a", la distancia desde el centro de una de sus caras a cada una de las caras restantes es:

A) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}a$

B) $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$

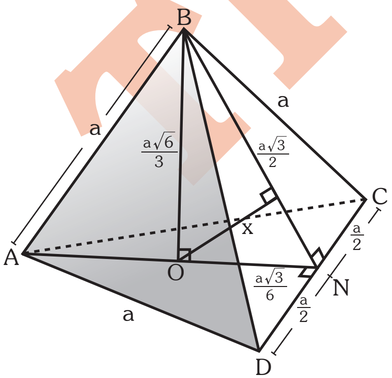
C) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}a$

D) $\dfrac{a}{\sqrt{6}}$

E) $\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}a$

### *Resolución 38*

**Poliedros regulares**




Piden: x

- O: Baricentro del $\Delta ABC$
- $BO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$
- $\Delta BON$: Relaciones métricas

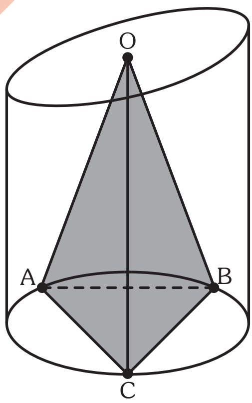
$$\frac{a\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.x$$

$$\therefore\ x = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}a$$

**Clave: E**

### *Pregunta 39*

En la figura, O – ABC es una pirámide regular. Calcule la relación que existe entre el volumen de la pirámide regular y el volumen del tronco de cilindro (O es centro).



A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3\pi}$

B) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3\pi}$

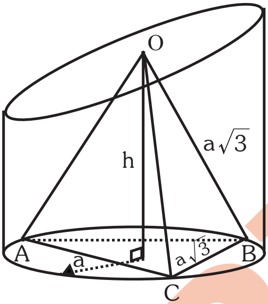
C) $\dfrac{\sqrt{3}}{4\pi}$

D) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

E) $\dfrac{\sqrt{3}}{2\pi}$

## Resolución 39

### Pirámide – Tronco de Cilindro




Piden: $\dfrac{V_{O-ABC}}{V_{T.Cilindro}}$

$$\frac{V_{O-ABC}}{V_{T.CILINDRO}} = \frac{\dfrac{(a\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{h}{3}}{\pi a^2 h} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$$

**Clave: C**

## Pregunta 40

Un stand de una feria de libros tiene un piso rectangular de 2 880 $m^2$ y el techo tiene una forma semicilíndrica. ¿Cuántos $m^2$ de lona se necesitarían para el techo, si el largo del stand es el quíntuple del ancho?

A) 1 240 $\pi$

B) 1 340 $\pi$

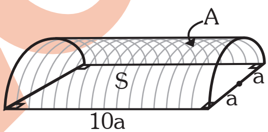
C) 1 440 $\pi$

D) 1 540 $\pi$

E) 1 640 $\pi$

## Resolución 40

### Cilindro




Piden: $A_{semicilíndrica}$

$$S = 10a(2a) = 2\cancel{0}a^2 = 288\cancel{0}$$
$$a^2 = 144$$
$$a = 12$$

$A_{semicilíndrica} = \pi Rg = \pi(a)(10a)$

$A_{semicilíndrica} = 10\pi a^2 = 10\pi(12)^2$

$A_{semicilíndrica} = 1\,440\pi$

**Clave: C**