MATEMÁTICA

Pregunta 01

Sean N y M números naturales. Al extraer la raíz cúbica al número 2N+M y al extraer la raíz cuadrada al número N–M, tienen como residuo cero y ambas raíces son iguales. Determine la suma de las cifras del mayor N menor que cien que satisface tal propiedad.

A) 3
B) 4
C) 5
D) 9
E) 12

Resolución 01

Potenciación - radicación

Radicación

$2N+\cancel{M} = k^3$ (+) Donde $k \in Z^+$

$N - \cancel{M} = k^2$

$3N = k^2(k+1)$

$$N = \frac{k^2(k+1)}{3} < 100 \;;\; k^2(k+1) = \overset{\circ}{3}$$

$k^2(k+1) < 300$

Resolviendo:

$k = 2 ; 3 ; 5 ; 6$

$$k_{máx} = 6 \rightarrow Nmáx = \frac{6^2(6+1)}{3}$$

$N_{máx} = 84$

$\therefore$ Suma de cifras= 8+4=12

Rpta.: 12

Pregunta 02

Sea Q el conjunto de los números racionales, luego todos los valores racionales posibles x de manera que

$$\sqrt{x^2+x+3}$$

sea racional, son de la forma:

A) $\frac{3-q^2}{2q^2+1}, q \in Q$

B) $\frac{3-q^2}{2q+1}, q \in Q \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

C) $\frac{3+q^2}{2q+1}, q \in Q \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

D) $\frac{3-q^2}{2q-1}, q \in Q \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

E) $\frac{3+q^2}{2q-1}, q \in Q \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Resolución 02

Números racionales Q

Fracciones continuas

Si: $\sqrt{x^2+x+3} = \frac{m}{n} \in Q$

$$\sqrt{x^2+x+3} = K$$

$$(x+1\tfrac{1}{2})^2 + \frac{11}{4} = k^2$$

$(2x+1)^2+11=(2k)^2$

$11=(2k)^2-(2x+1)^2$

$$11=\underbrace{[(2k)+(2x+1)]}_{11}\underbrace{[(2k)-(2x+1)]}_{1}$$

$$k=3 \ \wedge x=2$$

Solución general:

$$x=\frac{3-q^2}{2q-1}$$

$$2q-1\neq 0$$

$$q\neq\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ q\in Q/\left[\frac{1}{2}\right]$$

Rpta.: $\frac{3-q^2}{2q-1}, q\in Q\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$

Pregunta 03

Señale la alternativa correcta después de determinar si cada proposición es verdadera (V) o falsa (F), según el orden dado.

I. Existen números positivos a, b, c, d que forman una proporción geométrica discreta y armónica discreta a la vez.

II. Es posible encontrar dos números que están en relación de 3 a 5 cuya diferencia es 200.

III. Existen números positivos a, b, c, d que forman una proporción geométrica discreta y aritmética discreta a la vez.

A) VVV
B) VFV
C) FVV
D) FVF
E) FFF

Resolución 03

Razones y proporciones

Proporción

I. $*\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow\boxed{ad=bc}$

$$*\ \frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\rightarrow\frac{a+d}{\cancel{ad}}=\frac{b+c}{\cancel{bc}}$$

$$\boxed{a+d=b+c}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{bc}{d}+d=b+c$$

$$bc+d^2=bd+cd$$

$$\boxed{b(c-d)=d(c-d)}$$

1^{er} caso: $c-d\neq 0\rightarrow b=d\wedge a=c$

Las proporciones serian:

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{b}\wedge\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$$

2^{do} caso: $c-d=0\rightarrow c=d\wedge a=b$

Las proporciones serian:

$$\boxed{\frac{a}{a}=\frac{c}{c}}\wedge\boxed{\frac{1}{a}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{c}}$$

$\therefore$ Sí existen números positivos a, b, c y d ...... (V)

II. Sea $\left.\frac{a}{b}=\frac{3}{5}\right\}\begin{matrix}a=3k\\ b=5k\end{matrix}$

Además

$$\underbrace{a-b}=200 \qquad\vee\qquad \underbrace{b-a}=200$$

$$-2k=200 \qquad\qquad 2k=200$$

$$k=-100\left\langle\begin{matrix}a=-300\\ b=-500\end{matrix}\right. \qquad k=100\left\langle\begin{matrix}a=300\\ b=500\end{matrix}\right.$$

$\therefore$Sí es posible encontrar dos números ..... (V)

III. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \rightarrow \boxed{ad=bc}$

$$a-b=c-d \rightarrow \boxed{a+d=b+c}$$

De la primera proposición tenemos:

$\boxed{b(c-d)=d(c-d)}$

1^er caso: $c-d\neq 0 \rightarrow b=d \wedge a=c$

Las proporciones serian:

$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{a}{b}} \wedge \boxed{a-b=a-b}$

2^do caso: $c–d=0 \rightarrow c=d \wedge a=b$

Las proporciones serian:

$\boxed{\frac{a}{a}=\frac{c}{c}} \wedge \boxed{a-a=c-c}$

∴ Sí existen números positivos a, b, c y d .... (V)

Rpta.: V V V

Pregunta 04

La probabilidad de que haya un temblor en Chile es 0,8 y la probabilidad de que haya un temblor en Perú, dado que hubo uno en Chile es 0,4. Determine la probabilidad de que sucedan ambos eventos.

A) 0,12
B) 0,32
C) 0,38
D) 0,40
E) 0,68

Resolución 04

Probabilidades

Probabilidad condicional

Sea: P(A/B): Probabilidad de que ocurra A dado que ocurrió B

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \rightarrow \underbrace{P(B)}_{0,8}\times\underbrace{P(A/B)}_{0,4}=P(A\cap B)$$

$$=P(A\cap B)$$

$$\boxed{0,32=P(A\cap B)}$$

Rpta.: 0,32

Pregunta 05

Sea el número $N=\overline{4a(a+b)b}_{(12)}$. Se afirma

I. Existen valores para a y b tal que la división $N \div 12$ es exacta.

II. Existen valores para a y b tal que la división $N \div 9$ es exacta.

III. Existen valores para a y b tal que la división $N \div 1000$ es exacta.

¿Cuáles de las afirmaciones son las correctas?

A) I y II
B) I y III
C) II y III
D) I, II y III
E) Solo I

Resolución 05

Divisibilidad

Criterios

Sea $N=\overline{4a(a+b)b}_{(12)}$

I. $N=\overline{4a(a+b)b}_{(12)}=\overset{\circ}{12}+b$

$\Rightarrow$ N es $\overset{\circ}{12}$ para $b=0$ y cualquier valor de "a" desde 0 hasta 11. (V)

II. $N=\overline{4a(a+b)b}_{(12)}=\overset{\circ}{144}+12(a+b)+b$

$N=\overset{\circ}{9}+3(a+b)+b$

Si $N=\overset{\circ}{9}$; entonces $3(a+b)+b=\overset{\circ}{9}$
hay valores que hacen esto posible
$b=0 \to a=3;\ 6;\ 9$
$b=3 \to a=2;\ 5;\ 8$
$b=6 \to a=1;\ 4$
$b=9 \to a=0$ (V)

III. $N=\overline{4a(a+b)b}_{(12)}=4.12^3+a.12^2+(a+b).12+b$
$N=6912+156a+13b=6912+13(12a+b)$

$N=\overset{\circ}{1000}-88+13\overline{ab}_{(12)}$

Si $N=\overset{\circ}{1000}$, entonces $13\overline{ab}_{(12)}-88=\overset{\circ}{1000}$

$13\overline{ab}_{(12)}=\overset{\circ}{1000}+88+10\,000$

$\overline{ab}_{(12)}=\overset{\circ}{1000}+776 \to \overline{ab}_{(12)}=776$
como $\overline{ab}_{(12)}$ toma su máximo valor 143;
no hay valores ... (F)

Rpta.: I y II

Pregunta 06

Indique la alternativa correcta después de determinar si cada proposición es verdadera (V) o falsa (F), según el orden dado.

I. El producto de dos números enteros es un número natural.
II. La suma de todos los elementos del conjunto de los números enteros siempre es cero.
III. El cociente de dos números naturales es un número entero.

A) VVV
B) VFV
C) FVV
D) FVF
E) FFF

Resolución 06

Números enteros

Números enteros

I. Si $a,\ b\in\mathbb{Z}$, entonces $a.b\in\mathbb{N}$....(F)
Por contraejemplo
$\underbrace{1}_{\in\mathbb{Z}}.\underbrace{-1}_{\in\mathbb{Z}}=\underbrace{-1}_{\notin\mathbb{N}}$

II. (F)
No es una suma de valor único.
$S=...+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+...$
Agrupando

I. $S=\underbrace{(0-1)}_{-1}+\underbrace{(1-2)}_{-1}+\underbrace{(2-3)}_{-1}+\underbrace{(3-4)}_{-1}+...$

$S=-\infty$

II. $S=\underbrace{(1+0)}_{1}+\underbrace{(2-1)}_{1}+\underbrace{(3-2)}_{1}+\underbrace{(4-3)}_{1}+...$

$S=\infty$

III. $S=0+\underbrace{(1-1)}_{0}+\underbrace{(2-2)}_{0}+\underbrace{(3-3)}_{0}+...$

$S=0$
$\therefore$No es valor cero siempre.

III. Si $a,b\in\mathbb{N}$, entonces $\frac{a}{b}\in\mathbb{Z}$...(F)

Por contraejemplo

$\dfrac{\overset{\in\mathbb{N}}{1}}{\underset{\in\mathbb{N}}{2}}=\underbrace{0,5}_{\notin\mathbb{Z}}$

Rpta.: F F F

Pregunta 07

Determine el menor número natural divisible por los números primos p, q y r, sabiendo que $r - q = 2p$ y $rq + p^2 = 676$.

A) 2001
B) 2031
C) 2061
D) 2301
E) 2331

Resolución 07

Números primos

Números primos

$$r - q = 2p$$
$$r = q + 2p \; \ldots \; (I)$$

Luego

$$rq + p^2 = 676$$
$$(q+2p)q + p^2 = 676$$
$$q^2 + 2qp + p^2 = 676$$
$$(q+p)^2 = 676$$
$$q + p = 26$$

En (I) se tiene que

$$r = \underbrace{q+p}+p$$
$$\underset{\downarrow}{r} = 26 \; \underset{\downarrow}{+p} \;\wedge\; \underset{\downarrow}{q}+\underset{\downarrow}{p}=26$$
$$29 \qquad\quad 3 \qquad\quad 23 \;\; 3$$

Piden

$$N = \begin{cases} \overset{\circ}{29} \\ \overset{\circ}{3} \\ \overset{\circ}{23} \end{cases} \qquad N = \overset{\circ}{\overline{\mathrm{mcm}(29;3;23)}}$$
$$N = \overset{\circ}{2001}$$
$$\therefore N = 2001 \,(\text{mín. valor})$$

Rpta.: 2001

Pregunta 08

Indique la secuencia correcta después de determinar si cada proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. En un conjunto de 4 números cuyo máximo común divisor es igual a 1, entonces dichos números son primos dos a dos.

II. Si a y b son números primos entonces a + b también es primo.

III. Si a > 3, siendo a primo, entonces a es de la forma $a = 6k \div 1$ o $a = 6k - 1$, con $k \in N$.

A) VFF
B) VFV
C) FFF
D) FFV
E) FVV

Resolución 08

Números primos / mcd – mcm

Primos entre sí

I. mcd (a, b, c, d)=1, entonces (a, b, c, d) PESI 2 a 2. Por ejemplo (8, 15, 25, 35)=1, pero (8, 15, 25, 35) no son PESI 2 a 2. (F)

II. Si "a" y "b" son números primos, entonces (a+b) es primo. Si 11 y 17 son primos, pero (11+17) ∉ primos. (F)

III. Si a>3, siendo a=primo, entonces a=6k+1 o a=6k–1. (V)

$$\begin{aligned} &a=\overset{\circ}{2}+1 \\ &a=(\overset{\circ}{3}+1)\vee(\overset{\circ}{3}-1) \end{aligned} \begin{cases} a=\begin{cases}\overset{\circ}{2}+1\\ \overset{\circ}{3}+1\end{cases} & a=\overset{\circ}{6}+1=6k+1,\; k\in\mathbb{N} \\ a=\begin{cases}\overset{\circ}{2}-1\\ \overset{\circ}{3}-1\end{cases} & a=\overset{\circ}{6}-1=6k-1,\; k\in\mathbb{N} \end{cases}$$

Rpta.: F F V

Pregunta 09

Sea f: A → R una función definida por:

$f(x)\ \mathrm{Ln}[\log_{1/2}(5 - x^2)]$,

donde A = Dom (f) ⊂ R. Entonces la cantidad de números enteros que posee el conjunto A es:

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

Resolución 09

Función logarítmica

Dominio de la función

$\mathrm{Log}_{\frac{1}{2}}(5-x^2)>0 \quad \wedge \quad 5-x^2>0$

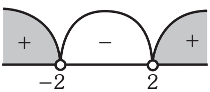
$x^2-5<0$

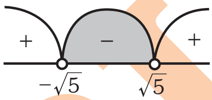
$(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})<0$

$5-x^2<1$

$0<x^2-4$

$0<(x+2)(x-2)$

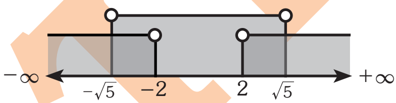




$x\in\langle-\sqrt{5};\sqrt{5}\rangle$

$x\in\langle-\infty;-2\rangle\cup\langle2;+\infty\rangle$

al intersecar:



$A=\mathrm{Dom}(f)=\langle-\sqrt{5};-2\rangle\cup\langle2;\sqrt{5}\rangle$

∴No existen valores enteros.

Rpta.: 0

Pregunta 10

Se vende 300 unidades de un cierto libro con un precio unitario de S/ 60. Luego por cada descuento de S/ 5 en el precio unitario se venden 45 unidades más. Determine el precio máximo a fijar para obtener un ingreso de al menos S/ 19 500.

A) 35
B) 40
C) 45
D) 50
E) 55

Resolución 10

Funciones

Funciones

Del problema

Precio unitario: $60-5x$

Cantidad: $300+45x$

$\text{Ingreso} = \underbrace{\text{precio}}\times\underbrace{\text{cantidad}}$

$19\,500 \leq (60-5x)(300+45x)$

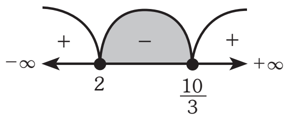
Efectuando:

$3x^2-16x+20\leq0$

$3x \quad -10$

$x \quad -2$

$(3x-10)(x-2)\leq0$



$x\in\left[2;\frac{10}{3}\right]$

Entonces

$$2 \le x \le \frac{10}{3}$$

$$-\frac{50}{3} \le -5x \le -10$$

$$\frac{130}{3} \le 60-5x \le 50$$

$\therefore$ Precio máx: S/50

Rpta.: 50

Pregunta 11

Sea A y B dos conjuntos, definidos por:

$A=\{n\in\mathbb{R} : n<2 \leftrightarrow 2n>1\}$ y

$B=\{n\in\mathbb{R} : n\in A \rightarrow n<1\}$

Determine $A\cup B$.

A) ϕ

B) $\left\langle \frac{1}{2};2 \right\rangle$

C) $\left\langle -\infty;\frac{1}{2}\right] \cup [2;+\infty\rangle$

D) $\left[\frac{1}{2};2\right]$

E) $\mathbb{R}$

Resolución 11

Números reales

Desigualdades

Redefiniendo cada conjunto:

$$A=\{n\in\mathbb{R} : n<2 \longleftrightarrow 2n>1\}$$

$$(n<2 \rightarrow 2n>1) \wedge (2n>1 \rightarrow n<2)$$

$$(n \geqslant 2 \vee n>\tfrac{1}{2}) \wedge (n \leqslant \tfrac{1}{2} \vee n<2)$$

$$\underbrace{(n>\tfrac{1}{2}) \wedge (n<2)}_{\frac{1}{2}<n<2}$$

$$\rightarrow A=\left\langle \frac{1}{2};2 \right\rangle$$

$$B=\{n\in\mathbb{R} : n\in A \rightarrow n<1\}$$

$$n\in A \rightarrow n<1 \equiv \sim(n\in A) \vee n<1$$

$$\underbrace{(-\infty<n\leqslant \tfrac{1}{2} \vee 2\le n<\infty) \vee n<1}_{n<1 \vee 2\leqslant n<\infty}$$

$$\rightarrow B=\langle -\infty;1\rangle \cup [2;\infty\rangle$$

Finalmente:

$A\cup B=\mathbb{R}$

Rpta.: $\mathbb{R}$

Pregunta 12

Considere las siguientes ecuaciones cuadráticas, donde $a\neq 1$:

$x^2+ax+1=0,$

$x^2+x+a=0,$

$x^2+(b-1)x-b=0.$

Sabiendo que las tres ecuaciones poseen una raíz real en común y una de las ecuaciones posee dos raíces enteras positivas, siendo una el triple de la otra, determine $a+b$.

A) -1

B) -2

C) -3

D) -4

E) -5

Resolución 12

Ecuaciones cuadráticas

Ecuaciones cuadráticas

De las ecuaciones:

$x^2+ax+1=0$... (1)

$x^2+x+a=0$... (2)

$x^2+(b-1)x-b=0$... (3)

$(1)-(2)$: $(a-1)x+1-a=0$

$a\neq 1$ $\qquad$ $x=1$

y de (3): $x^2+(b-1)x-b=0$

$$\begin{array}{ll} x & +b \\ x & -1 \end{array}$$

$(x+b)(x-1)=0$

$x_1=-b \quad x_2=1$

Por dato: $x_1=3x_2$

Entonces: $b=-3$

Entonces se observa que la raíz común es: $x=1$.

Ahora reemplazamos en (1):

$1+a+1=0$
$a=-2$

$\therefore$ Piden: $a+b=-5$

Rpta.: -5

Pregunta 13

Sea $f(x)=\text{Log}(|\text{senx}|)$, entonces el rango de f es el conjunto:

A) $[0;+\infty\rangle$
B) $\langle-\infty;0]$
C) $\mathbb{R}$
D) $[0;1]$
E) $\langle-1;1\rangle$

Resolución 13

Funciones

Función logarítmica

Para la función, se sabe que:

$$0<|\text{senx}|\leqslant 1$$

Tomando logaritmo:

$$-\infty<\log(|\text{sen } x|)\leqslant 0$$
$$-\infty<f(x)\leqslant 0$$
$$R_f=\langle-\infty;0]$$

Rpta.: $\langle-\infty,0]$

Pregunta 14

Sea f una función afín y biyectiva, tal que $f(1)=3$ y $f^*(0)=2$. Calcule $f^*(6)$

[f^* : función inversa de f]

A) -2
B) -1
C) $-\dfrac{1}{2}$
D) 0
E) 2

Resolución 14

Funciones

Función inversa

f : función afín y biyectiva:

$$f(x)=ax+b \wedge f^*(x)=\frac{x-b}{a}$$

$f(1)=3 \rightarrow a+b=3$

$f^*(0)=2 \rightarrow 2a+b=0$

Luego, $a=-3 \wedge b=6 \rightarrow f(x)=-3x+6 \wedge f^*(x)=2-\dfrac{x}{3}$

Nos piden $f^*(6)=2-\dfrac{6}{3}=0$

Rpta.: 0

Pregunta 15

Del polinomio $p(x)=2x^3-6x^2+11x-3$, se puede decir que:

A) Tiene dos raíces enteras y una racional.
B) Tiene una raíz entera y dos racionales.
C) Tiene tres raíces enteras.
D) Tiene tres raíces racionales.
E) Ninguna raíz es racional.

Resolución 15

Ecuaciones

Ecuaciones de grado superior

Dado el polinomio:

$$P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 11x - 3$$

de acuerdo al teorema de Gauss, si el polinomio admite una raíz racional esta debe ser de la forma

$$x = \frac{P}{q}$$

donde: P: Divisor del término independiente
q: Divisor del coeficiente principal

$$x = \pm\left\{\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 3; 1\right\}$$

Luego, se nota que no admite raíz racional.

Rpta.: Ninguna raíz es racional.

Pregunta 16

Considere las matrices $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} = B^{25} + B^{24} + B^{23} + \ldots + B + 2I$$

Calcule $f_{11}+f_{12}+f_{21}+f_{22}$

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

Resolución 16

Matrices

Potenciación

Sea:

$$A=\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}=B^{25}+B^{24}+B^{23}+\ldots\ldots+B^2+B+I+I$$

Para reducir, multiplicamos por la matriz: $(I - B)$

$$(I - B).A=(I - B)(B^{25}+B^{24}+\ldots+B+I)+(I-B)$$
$$(I - B).A=I - B^{26}+I - B= - B^{26} - B+2I$$

Pero, del dato: $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, se tiene:

$B^3= - I \to B^{26}=B^2$

Entonces:

$$(I - B).A= -B^2-B+2I= -(B - I)(B+2I)$$

$$(I - B).A=(I - B)(B+2I)$$

Para hallar la matriz "A", multiplicamos por: $(I - B)^{-1}$

$$A=B+2I \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$$

Nos piden: $f_{11}+f_{12}+f_{21}+f_{22}=5$

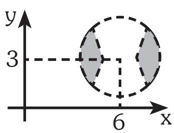
Rpta.: 5

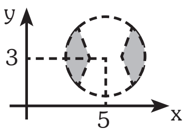
Pregunta 17

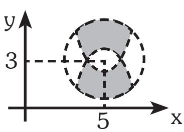
Dado el sistema de ecuaciones

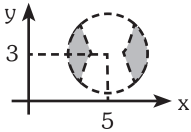
$x^2+y^2-10x-6y<-30$,
$y-x^2+10x<27$,
$10x-x^2-y<21$.

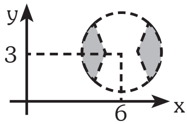
Señale el gráfico más próximo al conjunto solución del sistema anterior.

A)


B)


C)


D) 

E) 

Resolución 17

Gráfica de relaciones

Líneas curvas

Según las condiciones:

$x^2+y^2-10x-6y<-30 \leftrightarrow (x-5)^2+(y-3)^2<2^2$

$y-x^2+10x<27 \leftrightarrow y<(x-5)^2+2$

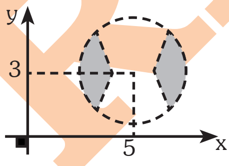
$10x-x^2-y<21 \leftrightarrow y>4-(x-5)^2$

La primera relación indica un círculo con centro en (5;3) y radio 2, sin incluir la circunferencia.

La segunda relación indica la región ubicada debajo de la parábola $y=(x-5)^2+2$, sin incluir el borde.

La tercera relación indica la región ubicada encima de la parábola $y=4-(x-5)^2$ sin incluir el borde.

Rpta.:



Pregunta 18

Sean $||(x, y)||_1 = |x|+|y|$,

$||(x, y)||_2 = \text{máx}\{|x|,|y|\}$ para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Calcule el área de la región C, donde

$C = \{(x,y): ||(x,y)||_2 \le 1 \text{ y } ||(x,y)||_1 \ge 1\}$

A) 0

B) 1

C) $\sqrt{2}$

D) 2

E) $2\sqrt{2}$

Resolución 18

Gráfica de relaciones

Valor absoluto

Según la teoría

$$\text{máx}\{|x|,|y|\} = \frac{|x|+|y|+||x|-|y||}{2}$$

por condición tenemos

$$\frac{|x|+|y|+||x|-|y||}{2} \le 1$$

$$|x|+|y|+||x|-|y|| \le 2$$

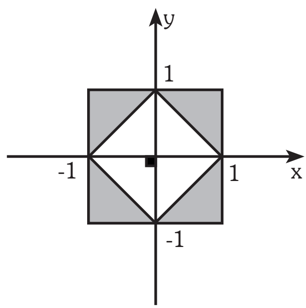
I. $|x| \ge |y| \wedge |x| \le 1$

II. $|x| \le |y| \wedge |y| \le 1$

Ahora, con la condición $||(x,y)||_1$ tenemos

$$\begin{cases} |x| \ge |y| \\ |x| \le 1 \\ |x|+|y| \ge 1 \end{cases} \vee \begin{cases} |x| \le |y| \\ |y| \le 1 \\ |x|+|y| \ge 1 \end{cases}$$

Graficando tenemos



nótese que el área de la región sombreada equivale al área que encierra el cuadrado.

$\therefore \text{Área} = (\sqrt{2})^2 = 2u^2$

Rpta.: 2

Pregunta 19

De la sucesión (a_n) donde

$a_n = (3^n + 4^n)^{\frac{1}{n}}$ donde $n \in \mathbb{N}$.

Podemos afirmar que:

A) $5 < a_n \leq 7$
B) $4 < a_n < 6$
C) $4 < a_n < 7$
D) $3 < a_n \leq 6$
E) $3 < a_n \leq 8$

Resolución 19

Sucesiones de números reales

Sucesión acotada

Fácilmente reconocemos que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente.

Según la teoría:

$\lim\limits_{n \to \infty} (a_n) < a_n \leqslant a_1$

$4 < a_n \leqslant 7$

Nótese que $4 > 3 \wedge 7 \leqslant 8$, por tanto:

$3 < a_n \leqslant 8$

Nota:

$\lim\limits_{n \to \infty} (a_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n}$

$\lim\limits_{n \to \infty} 4\sqrt[n]{1 + \overbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^n}^{0}} = 4$

Rpta.: $3 < a_n \leq 8$

Pregunta 20

Calcule el valor mínimo de la función objetivo $f(x,y) = 3x + 6y$ sujeto a las siguientes restricciones:

$2x + 3y \geq 12,$
$2x + 5y \geq 16,$
$x \geq 0,$
$y \geq 0.$

A) 20
B) 21
C) 22
D) 23
E) 24

Resolución 20

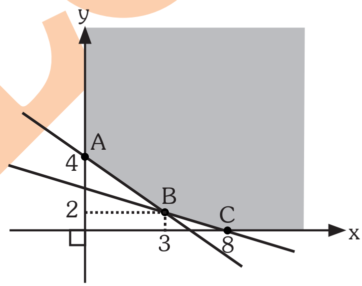
Programación lineal

Optimización

La función objetivo es:

$f(x; y) = 3x + 6y$

Graficando las restricciones:



Reemplazando cada punto vértice:

$f(A) = 0 + 24 = 24$
$f(B) = 9 + 12 = 21$
$f(C) = 24 + 0 = 24$

$\therefore$ Mínimo $= f(B) = 21$

Rpta.: 21

Pregunta 21

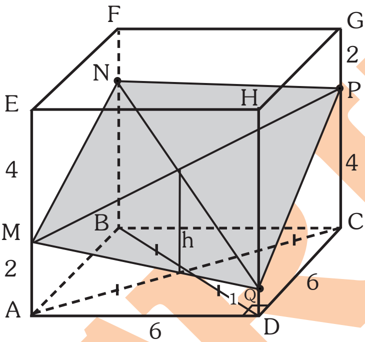
ABCD−EFGH es un hexaedro regular, con $M\in\overline{AE}$, $N\in\overline{BF}$, $P\in\overline{CG}$ y $Q\in\overline{DH}$. Si AM=2 u, PC=4 u, AE=6 u, y el volumen del sólido ADC−MQP es 42 u^2, calcule la diferencia NB−QD (en u).

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

Resolución 21

Geometría del espacio

Poliedros regulares



Piden NB−QD

*Volumen ADC−MQP=42 u^3

$$\left(\frac{2+QD+4}{3}\right).\left(\frac{6.6}{2}\right)=42$$

QD=1

- Asumiendo que "N" pertenece al plano determinado por MQP.

NB+1=2+4→NB=5

NB−QD=5−1=4

Rpta.: 4

Pregunta 22

En un triángulo ABC, AB=1 u, AC=$\sqrt{3}$ u. Se toma un punto P exterior al lado BC, de modo que m∢BPC=2m∢BCA.
Si BC=PC y $\overline{AB}//\overline{CP}$, calcule (en u) el valor de la mediana relativa al lado AC.

A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

C) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

D) $\frac{3}{2}$

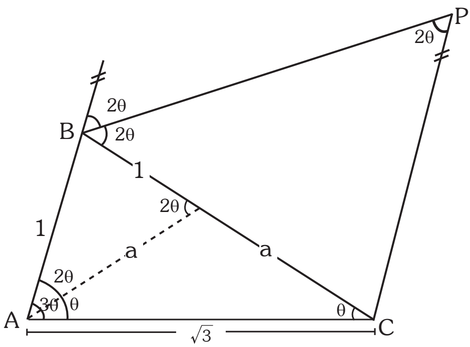
E) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

Resolución 22

Relaciones métricas

Relaciones métricas en triángulo oblicuo

Piden BM



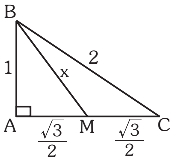
$\rightarrow m\sphericalangle BAC = 3\theta$

T. Stewart: $\triangle ABC$

$1^2 . a + \sqrt{3}^2 . 1 = a^2(a+1) + a(1)(a+1)$

$\rightarrow a=1$

$\rightarrow \triangle ABC(30°; 60°)$



$\therefore x = \frac{\sqrt{7}}{2}$

Rpta.: $\frac{\sqrt{7}}{2}$

Pregunta 23

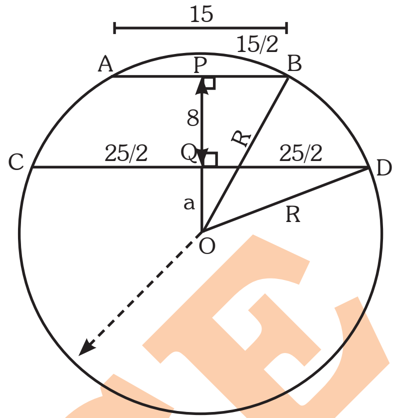
En una circunferencia se trazan dos cuerdas paralelas a un mismo lado del centro, una de 15 cm y la otra de 25 cm. Si distan entre sí 8 cm, ¿cuál es la longitud (en cm) del diámetro de la circunferencia?

A) 25,1
B) 25,2
C) 25,3
D) 25,4
E) 25,5

Resolución 23

Relaciones métricas

R. M. en $\triangle$ rectángulo



Piden=2R

Teorema de Pitágoras

$\triangle$ OPB y $\triangle$OQD

$R^2 = a^2 + \left(\frac{25}{2}\right)^2 = (8+a)^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2$

Resolviendo: $a = \frac{9}{4}$

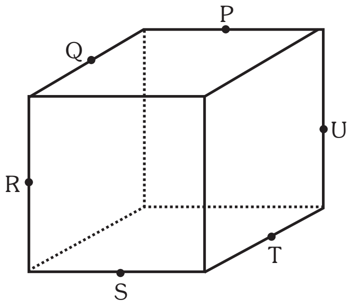
$R^2 = \left(\frac{25}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2$ $\qquad R = \frac{\sqrt{2581}}{4}$

2R=25,4

Rpta.: 25,4

Pregunta 24

La figura representa un cubo de arista "a" cm. Calcule el área (en cm^2) del polígono PQRSTU, si P, Q, R, S, T, U son puntos medios de las aristas.



A) $2\sqrt{3}\ a^2$

B) $3\sqrt{2}\ a^2$

C) $3\sqrt{3}\ a^2$

D) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\ a^2$

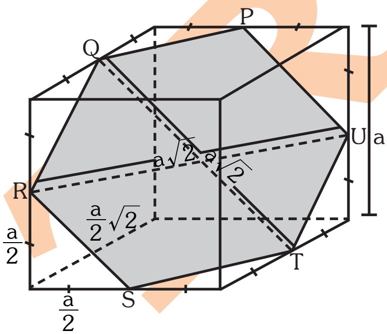
E) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\ a^2$

Resolución 24

Áreas

Geometría del espacio

Piden: $A_{\text{Región sombreada}}$



Se forma un hexágono regular:

$$A_{\text{Región sombreada}} = 6\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$A_{\text{Región sombreada}} = \frac{3}{4}\sqrt{3}\,a^2$$

Rpta.: $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$

Pregunta 25

Por los vértices de un triángulo equilátero ABC se trazan rectas paralelas. Si las distancias de las rectas paralelas extremas a la central son 3 u y 5 u, respectivamente, calcule el área del triángulo ABC (en u^2).

A) $15\sqrt{3}$

B) $\dfrac{46}{3}\sqrt{3}$

C) $\dfrac{47}{3}\sqrt{3}$

D) $16\sqrt{3}$

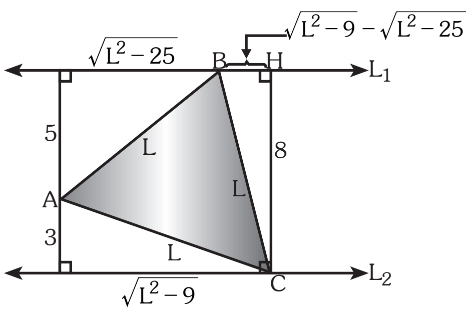
E) $\dfrac{49}{3}\sqrt{3}$

Resolución 25

Relaciones métricas

Relaciones métricas en triángulos rectángulos

Piden: $A_{\blacktriangle ABC}=?$



◺BHC: Teorema de Pitágoras

$$L^2 = 8^2 + (\sqrt{L^2-9} - \sqrt{L^2-25})$$

Resolviendo

$$L^2 = \frac{196}{3}$$

Calculando el área

$$A_{\blacktriangle ABC} = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} = \frac{196}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{4}$$

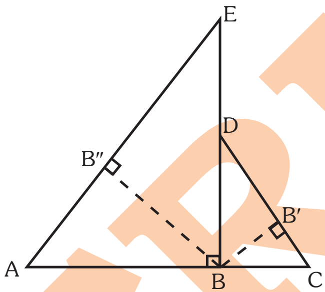
$$A_{\blacktriangle ABC} = \frac{49}{3}\sqrt{3}$$

Rpta.: $\frac{49}{3}\sqrt{3}$

Pregunta 26

En la figura AB=8 cm, AC=12 cm, AE=10 cm, y D es punto medio de $\overline{BE}$.

Calcule $\frac{BB'}{BB''}$.



A) $\frac{2}{5}$

B) $\frac{3}{7}$

C) $\frac{1}{2}$

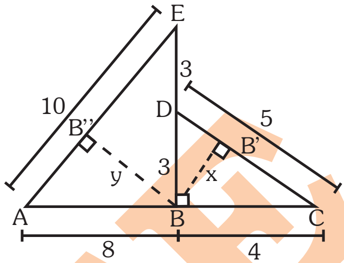
D) $\frac{3}{5}$

E) $\frac{4}{5}$

Resolución 26

Relaciones métricas

R. métricas en el T. rectángulo



- ◺ CBD:

$$3.4 = 5.x \longrightarrow x = \frac{12}{5}$$

- ◺ ABE:

$$8.6 = y.10 \longrightarrow y = \frac{48}{10}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{12}{5}}{\frac{48}{10}} = \frac{1}{2}$$

Rpta.: 1/2

Pregunta 27

Determine el número de triángulos escalenos, de perímetro menor que 10 u y cuyos lados tengan medidas enteras.

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

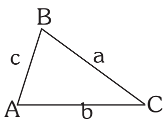
Resolución 27

Triángulos

Propiedades

Piden: Número de triángulos escalenos.

Dato: $2\,P_{\Delta ABC}<10$



Por existencia de triángulos

$$b<c+a$$
$$2b<\underbrace{a+b+c}<10$$
$$2b<9$$
$$c<a<b<4{,}5$$
$$\downarrow$$
$$2<3<4 \checkmark \rightarrow \text{cumple}$$
$$1<2<3 \times \rightarrow \text{no cumple}$$

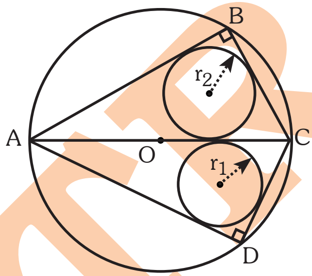
En los demás casos no cumple.

$\therefore$ Solo hay un triángulo escaleno.

Rpta.: 1

Pregunta 28

Se inscribe un cuadrilátero ABCD en una circunferencia como se aprecia en la figura. El perímetro del cuadrilátero es de 50 cm y el diámetro de la circunferencia AC es igual a 20 cm. Calcule r_1+r_2 en cm.

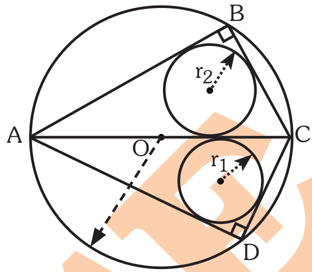


A) 3
B) 5
C) 6
D) 6,5
E) 7,2

Resolución 28

Circunferencia

Propiedades



Piden r_1+r_2

Dato: $2P_{\square ABCD}=50;\ AC=20$

T. Poncelet

$$AB+BC=AC+2r_2$$
$$AD+DC=AC+2r_1 \quad +$$
$$\overline{}$$
$$AB+BC+AD+DC=2(AC)+(r_1+r_2)$$
$$2P_{\square ABCD}=2(20)+(r_1+r_2)$$
$$50=40+2\,(r_1+r_2)$$
$$\therefore = r_1+r_2=5$$

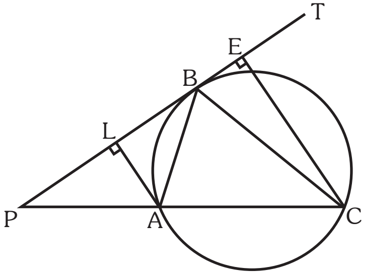
Rpta.: 5

Pregunta 29

En la siguiente figura, del punto P se traza una tangente $\overline{PT}$ y una secante $\overline{PC}$.

Si AC=12,5 cm, CE=13,5 cm y AL=6 cm.

Determine el valor de $\dfrac{BC}{AB}$.

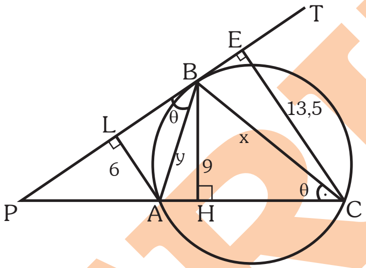


A) 1,25
B) 1,50
C) 1,75
D) 2,00
E) 2,25

Resolución 29

Semejanza

Semejanza de triángulos



Piden $\frac{BC}{AB}=\frac{x}{y}$

- Teorema de Pappus

  $BH^2=6.(13,5)$

  $BH=9$

- $\triangle BLA \sim \triangle CHB$

$$\frac{\cancel{6}^{\,2}}{\cancel{9}_{\,3}}=\frac{x}{y} \rightarrow \frac{2}{3}=\frac{y}{x}$$

$$\frac{x}{y}=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{x}{y}=1,50$$

Rpta.: 1,50

Pregunta 30

En un tetraedro regular A–BCD de arista igual a 4 u, exterior a un plano P, las distancias de B, C y D al plano P son 2 u, 6 u y 4 u respectivamente. Calcule (en u) la distancia del incentro del triángulo BCD al plano P.

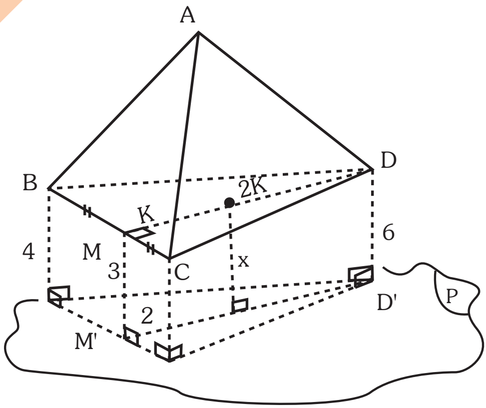
A) 2,5
B) 3,0
C) 3,5
D) 4,0
E) 4,5

Resolución 30

Poliedros

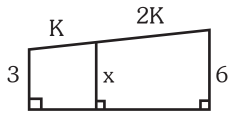
Poliedros regulares

Piden "x"



1. BM=MC
   $\Rightarrow$ MD: Mediana
   M'D': Proyección ortogonal

2. $\overline{MM'}$: Base media
   MM'=3

3. 

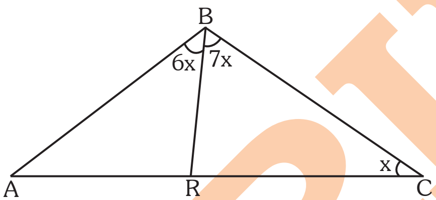
$$\Rightarrow X = \frac{3(2K)+K(6)}{K+2K}$$

$$X = \frac{12K}{3K} = 4$$

Rpta.: 4,0

Pregunta 31

En la figura siguiente AB=RC



Determine el valor de x.

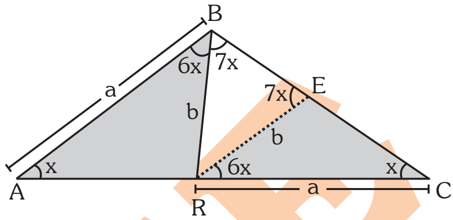
A) 8º
B) 10º
C) 12º
D) 14º
E) 15º

Resolución 31

Congruencia de triángulos

Construcción

Piden: x



- Se traza la ceviana $\overline{RE}$ tal que el ΔRBE es isósceles.
- $\Delta ABR \cong \Delta CRE$ (L AL)
  $\rightarrow$ m$\sphericalangle$BAR=m$\sphericalangle$RCE=x
- ΔABC: $\underbrace{x+6x+7x+x}=180°$
  $15x=180°$
  $\therefore x=12°$

Rpta.: 12°

Pregunta 32

Si los radios de dos circunferencias miden 2 u y 6 u y la distancia entre los centros es de 20 u. Calcule (en u) la distancia entre el punto de intersección de las tangentes interiores y el punto de intersección de las tangentes exteriores comunes a las dos circunferencias.

A) 10
B) 11
C) 12
D) 13
E) 15

Resolución 32

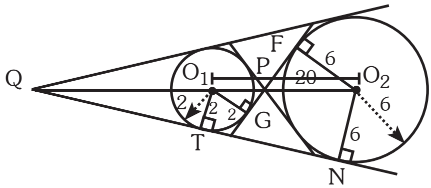
Semejanza

Semejanza

Piden: PQ

- $\triangle QO_1T \sim \triangle QO_2N$

$$\frac{2}{6}=\frac{QO_1}{QO_1+20} \longrightarrow QO_1=10$$



- $\triangle O_1GP \sim \triangle O_2FP$

$$\frac{2}{6}=\frac{O_1P}{20-O_1P} \longrightarrow O_1P=5$$

$\therefore$ PQ = 15

Rpta.: 15

Pregunta 33

Determine el rango de la función

$f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\frac{\text{arc sen}(x)+\frac{\pi}{2}}{\text{arc cos}(x)-2\pi}$$

A) [-1;0]

B) $\left[-\frac{1}{2};0\right]$

C) $\left\langle-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\rangle$

D) $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

E) [0;1]

Resolución 33

Funciones trigonométricas inversas

Dominio y rango

Como: $\text{arcsenx}=\frac{\pi}{2}-\text{arc cos}\,x$

$$f(x)=\frac{\pi-\text{arc cos}\,x}{\text{arccos}\,x-2\pi}$$

$$f(x)=\frac{-\pi}{\text{arc cos}\,x-2\pi}-1$$

Ahora:

$0\le \text{arccosx}\le\pi$

Luego:

$$-\frac{1}{2}\le\frac{-\pi}{\text{arc cos}\,x-2\pi}-1\le 0$$

$$\therefore\ \text{Ranf}=\left[-\frac{1}{2};0\right]$$

Rpta.: $\left[-\frac{1}{2};0\right]$

Pregunta 34

La ecuación de la cónica que sigue:

$$x^2+2\sqrt{3}\,xy+3y^2+8\sqrt{3}\,x-8y+32=0$$

corresponde a:

A) Hipérbola

B) Elipse

C) Circunferencia

D) Parábola

E) Punto

Resolución 34

Transformación de coordenadas

Ecuación de segundo grado

Como:

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F = 0$

$B^2-4AC = (2\sqrt{3})^2-4(1)(3) = 0$

$\Rightarrow$ Es una parábola

Rpta.: Parábola

Pregunta 35

Sean x, y, z las medidas de los ángulos interiores de un triángulo tales que:

cot(x)+cot(y)=-3tan(z)cot(x)cot(y).

Determine tan (x) en función del ángulo "y".

A) 2 tan (y)
B) 3 cos (y)
C) 4 cot (y)
D) 3 tan (y)
E) 4 sen (y)

Resolución 35

Identidades trigonométricas para tres ángulos

Propiedades

Datos:

I. $x+y+z=180°$

II. $\dfrac{ctgx + ctgy}{ctgx\ ctgy} = 3tgz$

$tgx+tgy=3tgz$

Se cumple:

$\underbrace{tgx+tgy}+tgz=tgx\ tgy\ tgz$

$3tgz+tgz=tgx\ tgy\ tgz$

$4=tgx\ tgy$

$tgx=4ctgy$

Rpta.: 4 cot (y)

Pregunta 36

Una población de aves amazónicas tiene modelo de crecimiento dado por la fórmula: $N(t) = 10^3(2\cos(\beta t)+5)$ aves, t en años, con fluctuaciones periódicas de 7 años. Determine el menor tiempo en que la población será de 6000 aves.

A) 3 años y 6 meses
B) 2 años y 6 meses
C) 2 años y 5 meses
D) 1 año y 2 meses
E) 1 año

Resolución 36

Funciones trigonométricas

Teoría de periodos

$N(t)=10^3(2\cos(\beta t)+5)$ periodo: $7=\dfrac{2\pi}{\beta}$

$\therefore \beta=\dfrac{2\pi}{7}$

$N(t)=10^3\left(2\cos\left(\dfrac{2\pi t}{7}\right)+5\right)$ para $N(t)=6000$

$6\times\cancel{10^3}=\cancel{10^3}\left(2\cos\left(\dfrac{2\pi t}{7}\right)+5\right)$

$\Rightarrow \cos\left(\dfrac{2\pi t}{7}\right)=\dfrac{1}{2}$; para menor tiempo:

$\dfrac{2\pi}{7}t=\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow t=\dfrac{7}{6}$ años

$\therefore$ t=1 año y 2 meses

Rpta.: 1 año y 2 meses

Pregunta 37

Determine para qué valores de x∈<0;2π> se cumple:

$$\frac{\cot^2(x)+4}{2\operatorname{sen}^2(x)+5\operatorname{sen}(x)-3}>0$$

A) $\left\langle\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right\rangle$

B) $\left\langle\frac{\pi}{6};\frac{3\pi}{4}\right\rangle$

C) $\left\langle\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right\rangle$

D) $\left\langle\frac{\pi}{6};\pi\right\rangle\setminus\left\{\frac{5\pi}{6}\right\}$

E) $\langle 0;\pi\rangle\setminus\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right\}$

Resolución 37

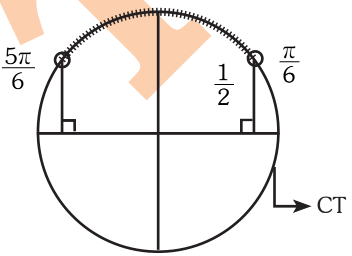
Inecuaciones trigonométricas

Inecuaciones trigonométricas

$$\frac{\overbrace{\operatorname{ctg}^2x+4}^{(+)}}{\underbrace{(\operatorname{sen}x+3)}_{(+)}(2\operatorname{sen}x-1)}>0$$

$$\Rightarrow 2\operatorname{sen}x-1>0 \ \wedge x\neq n\pi \,,\, n\in\mathbb{Z}$$

$$\operatorname{sen}x>\frac{1}{2}$$

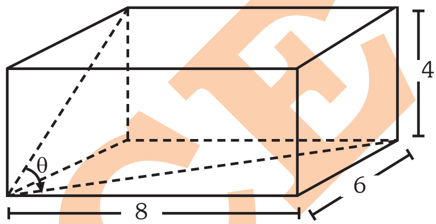


$$\therefore x\in\left\langle\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right\rangle$$

Rpta.: $\left\langle\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right\rangle$

Pregunta 38

En el paralelepípedo rectangular de la figura, determine aproximadamente la medida del ángulo θ.



A) 30º

B) 45º

C) 60º

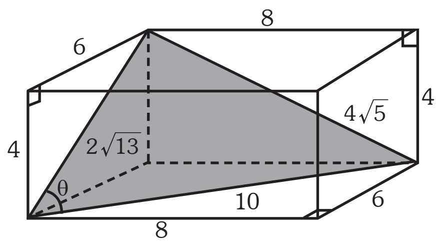
D) 75º

E) 90º

Resolución 38

Resolución de triángulos oblicuángulos

Teorema de cosenos



Aplicando el teorema de cosenos

$$(4\sqrt{5})^2=(2\sqrt{13})^2+(10)^2-2(2\sqrt{13})(10)\cos\theta$$

$$\cos\theta=\frac{9\sqrt{13}}{65}\rightarrow\cos\theta\approx 0{,}49$$

$\therefore \theta$ es aproximado a 60°

Rpta.: 60°

Pregunta 39

Las letras S, C y R denotan la medida de un mismo ángulo en los sistemas sexagesimal, centesimal y radial, respectivamente.

Dadas las siguientes proposiciones:

– Existe un ángulo no nulo tal que S+R=C.
– Existe un ángulo no nulo tal que S=CR.
– Existe un ángulo tal que S>C.

Son correctas:

A) Solo II
B) Solo II y III
C) Solo I y III
D) Solo III
E) I, II y III

Resolución 39

Sistemas de medición angular

Fórmula de conversión

Se cumple $S = 180k$, $C = 200k$, $R = \pi k$; $k \in \mathbb{R}$

I. $S + R = C$

$\pi k = 20k \Rightarrow k = 0$ $\quad\therefore$ ángulo nulo

II. $180k = 200k \, . \, \pi k$

$\Rightarrow k = 0$

$\Rightarrow k = \dfrac{9}{10\pi}$ $\quad\therefore$ ángulo nulo o no nulo

III. $S > C$

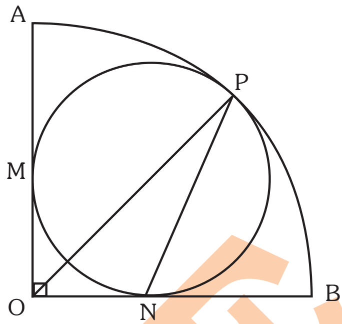
$9k > 10k$

$k < 0$ $\quad\therefore$ ángulo negativo

Rpta.: Solo II y III

Pregunta 40

En la figura mostrada M, N y P son puntos de tangencia de la circunferencia inscrita en el sector circular AOB. Si m∢OPN=θrad, entonces el valor de cot(θ) es:

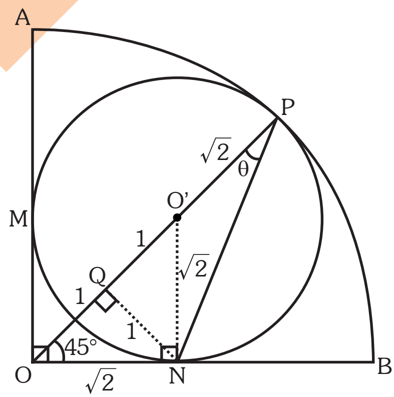


A) $\sqrt{2}-1$
B) $2\sqrt{2}-1$
C) $2\sqrt{2}$
D) $\sqrt{2}+1$
E) $\sqrt{2}+2$

Resolución 40

Razones trigonométricas

Ángulos agudos



I. ◺OQN: notable de 45°

II. $O'N = O'P = \sqrt{2}$

III. $\text{Cot}\theta = \sqrt{2} + 1$

Rpta.: $\sqrt{2} + 1$