Pregunta 01

Sean a, b, c ∈ N tales que $(\overline{ab})^3 = \overline{1c8ab}$. Entonces el valor de 2b - a - c es:

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

Resolución 01

Potenciación

Cubos perfectos

$a,b,c \in \mathbb{N}$: $(\overline{ab})^3 = \overline{1c8ab}$

- $a=\left[\sqrt[3]{\overline{1c}}\right] \rightarrow a=2$; $[x]=n \leftrightarrow n \le x < n+1$
- b puede ser: 1,4,5,6

$21^3 = 9261$ ×
$24^3 = 13\,824$ ✓
$25^3 = 15\,625$ × $\rightarrow$ c=3 y b=4
$26^3 = 17\,576$ ×

Respuesta: 2b – a – c
2(4) – 2 –3
8 – 5=3

Rpta.: 3

Pregunta 02

Se escogió un salón de clases de sexto grado con un total de 25 estudiantes y se les pidió a cada estudiante que evaluara un programa televisivo con una calificación de 1 a 5.

(5 = excelente, 4 = bueno, 3 = regular, 2 = malo, 1 = fatal)

Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

1	3	3	4	1
2	2	2	5	1
4	5	1	5	3
5	1	4	1	2
2	1	2	3	5

Calcule la suma de la media, la moda y la mediana de las calificaciones.

A) 1,00
B) 4,72
C) 5,72
D) 6,72
E) 8,72

Resolución 02

Estadística

Medidas de tendencia central

Calificativo	f_i
1	7
2	6
3	4
4	3
5	5
Total	25

* Media:

$$\bar{x} = \frac{1(7)+2(6)+3(4)+4(3)+5(5)}{25}$$

$$\bar{x} = 2{,}72$$

* Mediana: Dato de ubicación: $\frac{25+1}{2} = 13$

Me = d_{13} = 2

* Moda: Dato de mayor frecuencia:

$Mo = 1$

Pide: $\bar{x} + Me + Mo = 5{,}72$

Rpta.: 5,72

Pregunta 03

Indique la alternativa correcta después de determinar si cada proposición es verdadera (V) o falsa (F).

Sean a y b los valores reales positivos, $ma = \dfrac{a+b}{2}$, $mg = \sqrt{ab}$ y $mh = \dfrac{2ab}{a+b}$.

I. Si ma = mg, entonces ma = mg = mh.

II. Si mg = mh, entonces ma= mg = mh.

III. Si ma ≠ mg, entonces a ≠ b.

A) V V F
B) V V V
C) V F V
D) V F F
E) F V V

Resolución 03

Promedios

Relación entre medias

Si a y b$\in\mathbb{R}(+)$:

$$m_a = \frac{a+b}{2};\ m_g = \sqrt{ab}\ \text{y}\ m_h = \frac{2ab}{a+b}$$

I. Si $m_a = m_g$, entonces

$$\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} \rightarrow a+b = 2\sqrt{ab}$$

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = 0 \quad \therefore a=b$$

Si los # son iguales $\rightarrow \underline{m_a = m_g = m_h}$ (V)

II. Si $m_g = m_h$, entonces

$$\sqrt{ab} = \frac{2ab}{a+b} \rightarrow a+b = 2\sqrt{ab}$$

$$\therefore a=b$$

En virtud a(I) podemos afirmar:

$\underline{m_a = m_g = m_h}$ (V)

III. Si $m_a \neq m_g$, entonces $a \neq b$ (V)

Rpta.: V V V

Pregunta 04

Si se cumple

$$\overline{ab5}_{(b-1)5} = \overline{c(b-1)(2b+4)(2b+1)}$$

determine el valor de a + b + c.

A) 8
B) 11
C) 15
D) 19
E) 22

Resolución 04

Numeración

Cambio de base

Tenemos: $\overline{ab5}_{(b-1)5} = \overline{c(b-1)(2b+4)(2b+1)}$

Notamos: $\underline{b = 2}$, entonces:

$\overline{a25}_{15} = \overline{c185}$

$225a + 2 \times 15 + 5 = \overline{c185}$

$225a = \overline{c150} \rightarrow \underline{a = 14} \wedge \underline{c = 3}$

$\therefore a + b + c = 14 + 2 + 3 = 19$

Rpta.: 19

Pregunta 05

Si a la suma de 35 números impares consecutivos se le resta 42, entonces la cifra de la unidad del resultado final es:

A) 1
B) 3
C) 5
D) 7
E) 9

Resolución 05

Cuatro operaciones

Adición

Sean los impares consecutivos

$$\underbrace{x-34; \dots ; x-2; x; x+2; \dots ; x+34}_{35 \text{ números}} ; x \text{ es impar}$$

Suma de los 35 números: $35x = \dots 5$

Luego: $\underbrace{35x}_{\dots 5} - \underbrace{42}_{\dots 2} = \overline{{*}{*}\dots a}$

$$\Rightarrow a = 3$$

Rpta.: 3

Pregunta 06

Sea N múltiplo de 6, un número formado por tres cifras pares. Si N+1 es múltiplo de 7 y N+2 es múltiplo de 8, entonces la suma de las cifras de N es:

A) 6
B) 9
C) 12
D) 18
E) 21

Resolución 06

Divisibilidad

N: Número de tres cifras pares.

$$\left.\begin{array}{l} (*) N = \overset{\circ}{6} \rightarrow N = \overset{\circ}{6} + 6 \\ (*) N + 1 = \overset{\circ}{7} \rightarrow N = \overset{\circ}{7} + 6 \\ (*) N + 2 = \overset{\circ}{8} \rightarrow N = \overset{\circ}{8} + 6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} N = \overset{\circ}{\overline{MCM(6; 7; 8)}} + 6 \\ N = \overset{\circ}{168} + 6 \end{array}$$

Entonces:

N={174; 342; 510; 678; 846}

El único valor que cumple para N es 846.

$\Rightarrow$suma de cifras de N= 8+4+6=18

Rpta.: 18

Pregunta 07

Sean A y B enteros positivos tales que A> B. Al dividir A entre B se obtiene r_d residuo por defecto y r_e residuo por exceso. Indique la alternativa correcta después de determinar si cada proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. $r_d + r_e = A$
II. $r_e > r_d$
III. $MCD(A;B) = MCD(r_d, r_e)$

A) F F F
B) F V V
C) F F V
D) F V F
E) V V V

Resolución 07

Cuatro operaciones

División en $\mathbb{N}$

A y B $\in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

A > B, al dividir

$$\begin{array}{r|l} A & B \\ \hline r_d & q \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} A & B \\ \hline r_e & q+1 \end{array}$$

Por defecto   Por exceso

I. $r_d + r_e = A$ ... (F): lo correcto sería $r_d + r_e = B$

II. $r_e > r_d$ ... (F): porque $(r_e < r_d) \vee (r_e > r_d) \vee (r_e = r_d)$

III. $MCD(A; B) = MCD(r_d; r_e)$ ... (V)

$$MCD(A; B) = MCD(B; \underset{\text{por defecto o por exceso}}{r}) = MCD(r_d; r_e)$$

Rpta.: F F V

Pregunta 08

Señale la alternativa que presenta la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F):

I. Si $a>0$, entonces existe $n_o \in N$ tal que $a > \dfrac{1}{n_o}$.

II. Para cuando $a, b \in Q$ con $a<b$, existe $c \notin Q$ tal que $a<c<b$.

III. Todo número irracional puede ser aproximado por números racionales.

A) V V V
B) V F F
C) F V V
D) F F V
E) F F F

Resolución 08

Números racionales

Números racionales

I. Si $a>0$, entonces existe $n_o \in N$, tal que $a > \dfrac{1}{n_o}$ ... (V)

$\Rightarrow$ Ya que para algún $K>1 \to Ka>a \to a>\dfrac{1}{\frac{K}{a}}$; cumple para algún $n_o=\dfrac{K}{a}$.

II. Para cada $a, b \in Q$ con $a<b$, existe $c \notin Q$, tal que $a<c<b$... (V)

$\Rightarrow$ Ya que el conjunto de los racionales es denso pero no continuo, porque entre ellos existen infinitos números irracionales.

III. Todo número irracional puede ser aproximado por números racionales... (V)

$\Rightarrow$ Ya que todo irracional está entre dos números racionales y puede ser aproximado por la derecha o izquierda.

Rpta.: VVV

Pregunta 09

Sea:

$D=\{(x;y) \in R^2 / x \geq 0, y \geq 0, x+y \geq 2, x+y \leq 4\}$

Si $a<0$ y $b>0$, determine la solución del problema $\begin{cases} \text{Máx } ax+by \\ \text{s.a. } (x,y) \in D \end{cases}$

A) (0;0)
B) (0;2)
C) (0;4)
D) (2;0)
E) (4;0)

Resolución 09

Programación lineal

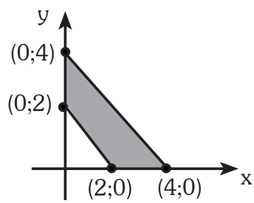
Optimización

Función objetivo: Max: $\{ax+by\}$

Restricciones

$\begin{cases} x+y \geq 2 \\ x+y \leq 4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

Región factible



Si $a<0 \wedge b>0$

entonces: Max $\{ax+by\}$

para $x=0$; $y=4$

Rpta.: (0;4)

Pregunta 10

Sea A una matriz de orden 3x5 y B una submatriz cuadrada A de orden 3 tal que

$A = (B : N)$ donde N es de orden 3x2 y B^{-1} existe. Correspondientemente, en el sistema

$Ax = b$, x se descompone como $x=\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$.

Entonces una solución del sistema es:

A) $\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ Nx_B \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ B\,x_N \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} B\,b \\ N\,b \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} (B-I)\,b \\ 0 \end{pmatrix}$

Rpta.: $\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$

Resolución 10

Sistema de ecuaciones

Sistema de ecuaciones

$AX = b$

$(B \,\vdots\, N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = b$

$(BX_B \,\vdots\, NX_N) = b$

$\downarrow$

$\nexists N^{-1}$

$\rightarrow X_N = 0$ (matriz nula)

Entonces:

$(BX_B \,\vdots\, 0) = b$

$BX_B = b$

$\underbrace{B^{-1}.B}_{I}.X_B = B^{-1}b$

$I\ X_B = B^{-1}b$

$X_B = B^{-1}b$

$\rightarrow \begin{pmatrix} X_B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$

Rpta.: $\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$

Pregunta 11

Tres números x, y, z forman una progresión geométrica que cumple:

$x + y + z = 21$

$x \,.\, y \,.\, z = 216$

Determine la razón de la progresión dada.

A) 3/2
B) 2
C) 5/2
D) 3
E) 7/3

Resolución 11

Progresión

Progresión geométrica

Si: x; y; z estan en PG

$x = t$

$\rightarrow y = tq$ donde: $q > 1$

$z = tq^2$

Por dato:

$xyz=216$

$(tq)^3=216$

$tq=6$.........(α)

Además:

$x+y+z=21$

$t+tq+tq^2=21$

$t(1+q+q^2)=21$......(β)

$\frac{\alpha}{\beta}: \frac{q}{1+q+q^2} = \frac{2}{7}$

$O=2q^2-5q+2$

$2q \quad -1$

$1 \quad -2$

$q=1/2 \vee q=2$

Rpta.: 2

Pregunta 12

Determine el número de soluciones reales de la ecuación

$$|\operatorname{sen}(x)| = |\operatorname{Ln}|x-\pi||$$

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

Resolución 12

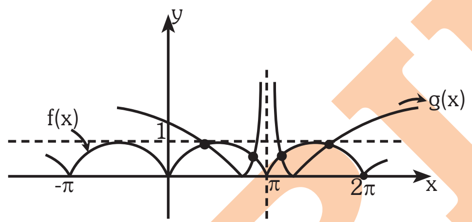
Funciones

Gráficas

El número de soluciones es igual a la cantidad de interceptos.

$f(x) = |\operatorname{sen}(x)|$

$g(x) = |\operatorname{Ln}|x-\pi||$



$\therefore$ La ecuación tiene cuatro soluciones.

Rpta.: 4

Pregunta 13

Dada una proposición x, se define f como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ si x es una proposición verdadera.} \\ 0, \text{ si x es una proposición falsa.} \end{cases}$$

Indique cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas.

I. $f(p \wedge q) = f(p) \cdot f(q)$
II. $f(\sim p) = 1 - f(p)$
III. $f(p \rightarrow q) = 1 + f(q) - f(p)$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) Solo II y III

Resolución 13

Lógica y conjuntos

Lógica

I.

p	$\wedge$	q
V	V	V
V	F	F
F	F	V
F	F	F

$: f(p \wedge q) = f(p) \cdot f(q)$

$f(V) = f(V) \cdot f(V)$

$f(F) = 0$

La proposición es verdadera (V)

II. $\sim p \qquad : f(\sim p) = 1 - f(P)$

$V \equiv F \qquad f(V) = 1 - f(F)$

$F \equiv V \qquad f(F) = 1 - f(V)$

La proposición es verdadera (V)

III.

p	$\longrightarrow$	q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

$: f(p \rightarrow q) = 1 + f(q) - f(p)$

F V V F

$1 = 1 + 1 - 0$

$1 = 2$

La proposición es falsa (F)

Rpta.: Solo I y II

Pregunta 14

Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F):

I. Si $0 < a < b < c$, entonces $\dfrac{c-a}{ac} > \dfrac{c-b}{bc}$

II. $|a-b|^2 \leq |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|$

III. $|a+b+c| \geq |a| + |b| + |c|$

A) V V V
B) V V F
C) V F F
D) F F V
E) F F F

Resolución 14

Números reales

Desigualdades

I. Por condición $a < b \leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{c} > \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$$

$$\frac{c-a}{ac} > \frac{c-b}{bc}$$

La proposición es verdadera (V).

II. Por desigualdad triangular

$$|a+b| \le |a| + |b| \leftrightarrow |a-b| \le |a| + |-b|$$

$$|a-b| \le |a| + |b| \rightarrow |a-b|^2 \le (|a| + |b|)^2$$

$$|a-b|^2 \le |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|$$

La proposición es verdadera (V).

III. De la desigualdad triangular se obtiene

$$|a+b+c| \le |a| + |b| + |c|$$

La proposición es falsa (F).

Rpta.: V V F

Pregunta 15

Si $a + b + c = 1$ y $a^3 + b^3 + c^3 = 4$, entonces el valor de $M = \frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ac} + \frac{1}{c+ab}$ es:

A) –2
B) –1
C) 0
D) 1
E) 2

Resolución 15

Productos notables

Datos:

$a+b+c=1 \wedge a^3+b^3+c^3=4 \Rightarrow$

$(a+b)(b+c)(a+c)=-1$

Calcular $M = \frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ac} + \frac{1}{c+ab}$

para sumar las fracciones como artificio

$$a+bc = a.1+b.c$$
$$= a(a+b+c)+bc$$
$$\Rightarrow a+bc = (a+c)(a+b)$$

Análogamente para

$b+ac=(b+c)(b+a) \wedge c+ab=(c+a)(c+b)$

entonces

$$M = \frac{1}{(a+c)(a+b)} + \frac{1}{(b+c)(b+a)} + \frac{1}{(c+a)(c+b)} = \frac{2(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(a+c)} = \frac{2(1)}{(-1)}$$

$M = -2$

Rpta.: -2

Pregunta 16

Al dividir un polinomio $P=P(x)$ de grado 3 entre $(x+2)$ se obtiene un polinomio cociente $Q=Q(x)$ y un resto de grado 1, si se sabe que $P(0)=-1$, $P(-2) = -5$ y $Q(0)=1$. Halle la expresión del resto.

A) $x + 3$
B) $x + 1$
C) $x - 1$
D) $x - 3$
E) $2x - 1$

Resolución 16

División algebraica

División algebraica

Por identidad fundamental

$P(x) = (x + 2)Q(x) + R(x)$

donde $R(x) = ax + b$

$P(x) = (x + 2)Q(x) + ax + b$

Datos:

- $P(0) = -1 \rightarrow -1 = 2Q(0) + b$

  $-1 = 2 + b$

  $\boxed{b = -3}$

- $P(-2) = -5 \rightarrow -5 = 0\cancel{Q}_{(-2)} - 2a + b$

  $-5 = -2a - 3$

  $\boxed{a = 1}$

Rpta.: x – 3

Pregunta 17

Sea "x" tal que $|x| < 1$. Calcule en función de x, el valor de la suma:

$S = 2 + 4x + 6x^2 + 8x^3 + 10x^4 + ...$

A) $\dfrac{1}{1-x}$

B) $\dfrac{2}{x-1}$

C) $\dfrac{2}{x^2-2x+1}$

D) $\dfrac{2}{x^2-x+1}$

E) $\dfrac{2}{x^2+x+1}$

Resolución 17

Series

Suma infinita

$S = 2 + 4x + 6x^2 + 8x^3 + 10x^4 + ...$

Multiplicando por "x"

$xS = 2x + 4x^2 + 6x^3 + 8x^4 + ...$

Restamos

$S - xS = 2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4$

$(1 - x)S = 2(1 + x + x^2 + x^3 + ...)$; $|x| < 1$

$(1 - x)S = \dfrac{2}{1-x} \rightarrow S = \dfrac{2}{x^2-2x+1}$

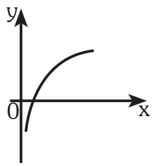
Rpta.: $\dfrac{2}{x^2-2x+1}$

Pregunta 18

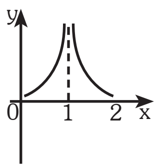
El punto (–1 ; –2) pertenece a la gráfica de la función polinómica $f(x)=2kx^3 + 4kx^2 - 3x - 9$.

Si $g(x) = \dfrac{f(x)}{x(x-1)(x+1,5)^2}$, ¿cuál de las siguientes gráficas corresponde a g para x > 0?

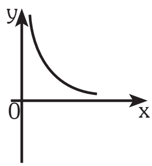
A)

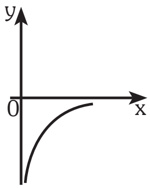


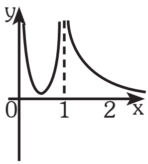
B)



C)



D) 

E) 

Resolución 18

Funciones

Gráficas

$(-1;-2) \in f \rightarrow -2=2k(-1)^3+4k(-1)^2\text{-}3(-1)-9$

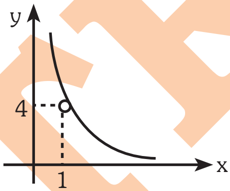
$k = 2$

Luego:

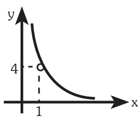
$$g_{(x)} = \frac{4x^3+8x^2-3x-9}{x\,.\,(x-1)\,(x+1,5)^2} \rightarrow g(x) = \frac{4\,(2x+3)^2\,.\,(x-1)}{x.\,(x-1)\,(2x+3)^2}$$

Simplificando: $g(x) = \dfrac{4}{x}$

Graficando para $x > 0 \wedge x \neq 1$



Nota: La función es discontinua en $x = 1$

Rpta.: 

Pregunta 19

Sea f la función definida por:

$f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}, \forall x > 1$: La inversa f* de esta función es:

A) $f^*(x) = \dfrac{x-1}{2x-1}$, $x > 1/2$

B) $f^*(x) = \dfrac{x+1}{2x+1}$, $x < \dfrac{1}{2}$

C) $f^*(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$, $x > -2$

D) $f^*(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$, $x < -2$

E) $f^*(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$, $x > 2$

Resolución 19

Funciones

Función inversa

$$y = f(x) = \frac{2x-1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}$$

Por condición, $1<x<\infty$; ahora

$$0 < \frac{1}{x-1} < \infty$$

$2 < y < \infty$

Nótese también que

$$y = 2 + \frac{1}{x-1} \longrightarrow x = \frac{y-1}{y-2}$$

Finalmente, tenemos

$$f^*(x) = \frac{x-1}{x-2};\ x > 2$$

Rpta.: $f^*(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$, $x > 2$

Pregunta 20

Halle la matriz A si sabemos que

$$AX^{-1}=[(A^{-1})^2-A^{-1}]^{-1},\ \text{donde } X=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}$$

A) $\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & 1\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 1 & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

Resolución 20

Matrices

Matriz inversa

$A.x^{-1} = [(A^{-1})^2 - A^{-1}]^{-1}$

Según propiedad de inversa:

$x.A^{-1} = A^{-1}\,.\,A^{-1} - A^{-1}$

$$x.\underbrace{A^{-1}.A}_{I} = (A^{-1}.A^{-1} - A^{-1}).A$$

$x = A^{-1}.I - I$

$x+I = A^{-1}$

$(x+I)^{-1} = A$

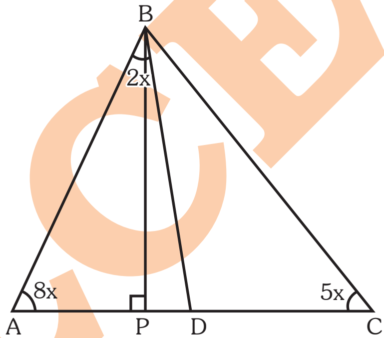
$$A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{6}.\begin{pmatrix}6 & -2\\ -3 & 2\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ A=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

Rpta.: $\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$

Pregunta 21

En la figura AB=10 cm, BD=AC, DC=3 cm. Halle AP×PD.



A) 12,25

B) 20,25

C) 21,00

D) 25,00

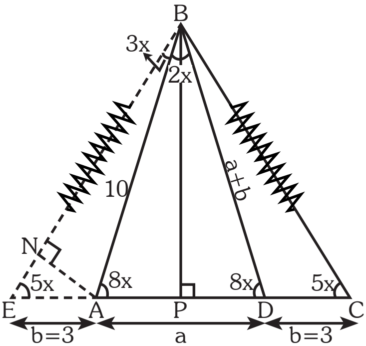
E) 49,00

Resolución 21

Triángulos

Congruencia

Piden: AP.PD



Se forma el ΔEBC isósceles (EB=BC)

ΔEBD isósceles ED=BD=a+b

$\Delta EBA \cong \Delta CBD$ (L.A.L)

a+b=10

pero b=3→a=7

$$AP = PD = \frac{7}{2}$$

ΔABD isósceles

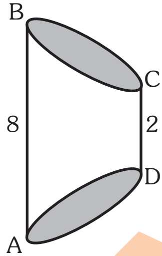
AP.PD=12,25

Nota: Al calcular x este es 10°, luego se traza la perpendicular $\overline{AN}$ hacia $\overline{EB}$(AN=5). El triángulo EAN no existe.

Rpta.: 12,25

Pregunta 22

En la figura: En el tronco de cilindro las bases tienen áreas iguales y los planos que las contienen son perpendiculares; AB=8 u, CD=2 u. Halle el volumen de tronco de cilindro (en u^3).



A) 11,25 π

B) 22,5 π

C) 45 π

D) 90 π

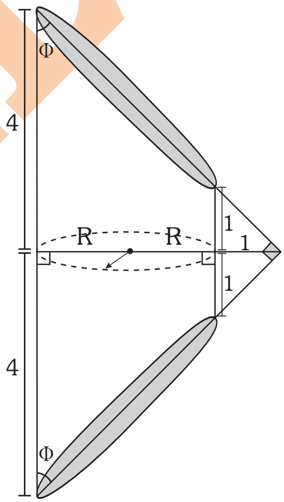
E) 180 π

Resolución 22

Sólidos

Tronco de cilindro

Piden: V



1) $2\Phi = 90°$
$\Phi = 45°$

2) $2R = 3$
$R = \frac{3}{2}$

3) $V = \pi\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{8+2}{2}\right)$
$V = \frac{9\pi}{4}(5) = \frac{45\pi}{4} = 11{,}25\pi$

Rpta.: $11{,}25\pi$

Pregunta 23

En un trapecio ABCD ($\overline{AD}//\overline{BC}$), las bisectrices exteriores de A y B se intersecan en P y las bisectrices exteriores de C y D se intersecan en Q.

Si AD+BC=AB+CD=10 cm, entonces PQ en cm es:

A) 8
B) 10
C) 12
D) 14
E) 16

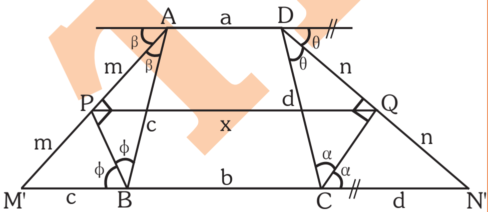
Resolución 23

Cuadrilátero

Trapecio

Piden "x"

Dato: a+b=c+d=10



OBS: M'B=AB; CN'=DC

1. Prolongar $\overline{DQ}$ y $\overline{AP}$ intersecan a la recta $\overleftrightarrow{BC}$ en M' y N'

2. $\overline{PQ}$: base media del trapecio ADN'M'

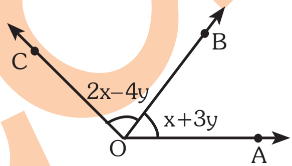
$$x = \frac{a+b+c+d}{2}$$

$$x = \frac{10+10}{2} = 10$$

Rpta.: 10

Pregunta 24

En la figura m∢AOC=120°, halle el menor valor entero de x.

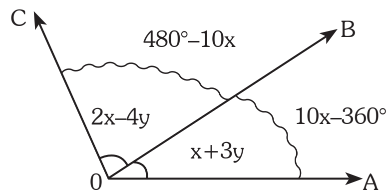


A) 34°
B) 35°
C) 36°
D) 37°
E) 38°

Resolución 24

Ángulo

Ángulo rectilíneo



Piden x $_{\text{mínimo entero}}$

m∢AOC= 120°

$2x - 4y + x + 3y = 120° \longrightarrow 3x - 120° = y$

Reemplazando y

$* \ 480° - 10x > 0°$

$480° > 10x$

$48° > x$

$* \ 10x - 360° > 0°$

$x > 36°$

$\therefore x_{\text{mínimo entero}} = 37°$

Rpta.: 37°

Pregunta 25

La base de un prisma recto es un hexágono regular de 2 m de lado. Si la arista lateral mide $6\sqrt{3}$ m, halle el volumen (en m^3) del prisma.

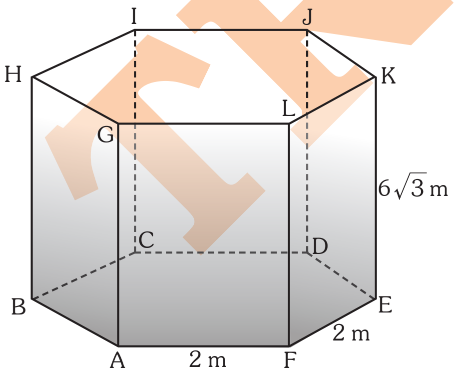
A) 72
B) 96
C) 108
D) 136
E) 154

Resolución 25

Geometría del espacio

Prisma recto

- Piden volumen ABCDEF - GHIJKL



- Área ⬢ ABCDEF $= 6\dfrac{(2)^2 . \sqrt{3}}{4}$

$= 6\sqrt{3}\ m^2$

Volumen

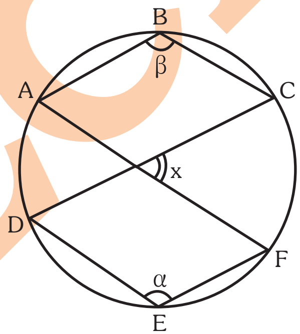
ABCDEF - GHIJKL $= (6\sqrt{3}).(6\sqrt{3})$

$= 108\ m^3$

Rpta.: 108

Pregunta 26

Dado el gráfico siguiente, se muestra una circunferencia. Determine la relación correcta.



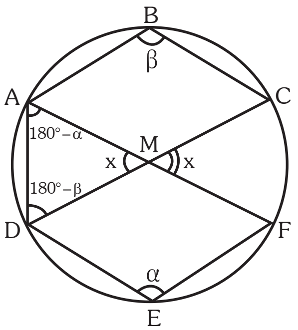
A) $x = \alpha + \beta + 90°$
B) $90° + x = \alpha + \beta$
C) $\alpha + \beta + 180° = x$
D) $\alpha + x = \beta + 180°$
E) $180° + x = \alpha + \beta$

Resolución 26

Circunferencia

Cuadrilátero inscrito

*Piden la relación entre "x", "α" y "β"



* ▱ ABCD: cuadrilátero inscrito
* ▱ AFED: cuadrilátero inscrito
* △ AMD:

$$180° - \alpha + x + 180° - \beta = 180°$$

$$180° + x = \alpha + \beta$$

Rpta.: $180° + x = \alpha + \beta$

Pregunta 27

En una pirámide regular O – ABCD, la longitud de la distancia trazada de B a $\overline{OD}$ es $4\sqrt{2}$ u y las regiones AOC y ABCD tienen igual área. Determine el volumen de la pirámide en (u^3).

A) $\frac{20}{3}\sqrt{10}$

B) $\frac{32}{3}\sqrt{10}$

C) $\frac{40}{3}\sqrt{10}$

D) $15\sqrt{10}$

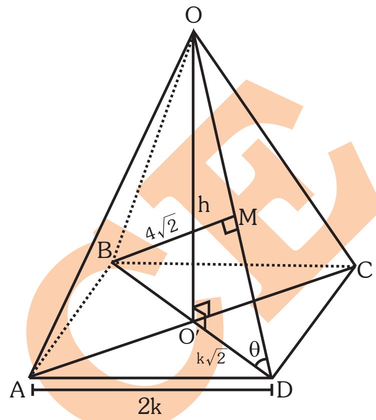
E) $23\sqrt{10}$

Resolución 27

Geometría del espacio

Pirámide regular

* Piden: Volumen O – ABCD



* Dato: $\text{Área}_{\blacktriangle AOC} = \text{Área}_{\blacksquare ABCD}$

$$h.\frac{2k\sqrt{2}}{2} = (2k)^2 \longrightarrow h = 2k\sqrt{2}$$

* ⊿ OO'D: $h^2 + (k\sqrt{2})^2 = (OD)^2$

$$k\sqrt{10} = OD$$

* ⊿BMD ~ ⊿OO'D

$$\frac{4\sqrt{2}}{h} = \frac{2k\sqrt{2}}{OD}$$

Reemplazando h y OD:

$$\frac{4\sqrt{2}}{2k\sqrt{2}} = \frac{2k\sqrt{2}}{k\sqrt{10}}$$

$$\rightarrow k = \sqrt{5}$$

$$\text{Volumen}_{O-ABCD} = \frac{1}{3}(2k)^2.h = \frac{1}{3}(2\sqrt{5})^2(2\sqrt{10}) = \frac{40}{3}\sqrt{10}\,u^3$$

Rpta.: $\frac{40}{3}\sqrt{10}$

Pregunta 28

En un triángulo isósceles ABC ($\overline{AC} \cong \overline{BC}$) se traza por el vértice A un plano, de modo que dista de C una longitud n unidades y de B una longitud 2n unidades. Si el segmento $\overline{AB}$ determina un ángulo de 45° con el plano y la proyección de $\overline{CB}$ sobre el plano mide 2n unidades. Calcule el área de la proyección del triángulo ABC sobre el plano.

A) $n^2\sqrt{2}$

B) $n^2\sqrt{3}$

C) $2n^2\sqrt{3}$

D) $3n^2\sqrt{2}$

E) $4n^2\sqrt{3}$

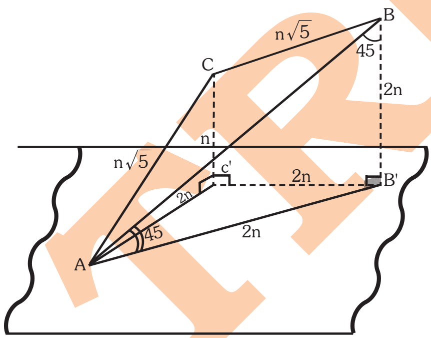
Resolución 28

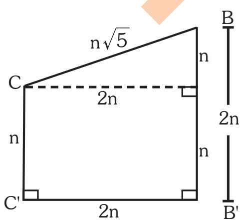
Estereometría

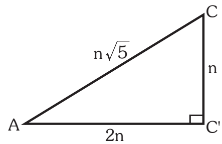
Área proyectada

Piden $A_{\triangle AC'B'}$

Dato: AC=CB







$$\therefore A_{\triangle AC'B'} = \frac{(2n)^2}{4}\sqrt{3} = n^2\sqrt{3}$$

Rpta.: $n^2\sqrt{3}$

Pregunta 29

Se consideran un cuadrado ABCD y un triángulo equilátero ABE con E encima del plano del cuadrado. Halle el ángulo formado por el triángulo ABE y el cuadrado ABCD, si las áreas de los triángulos AEB y DCE están en la relación $\sqrt{3}$.

A) 15°

B) 22°30′

C) 30°

D) 37°

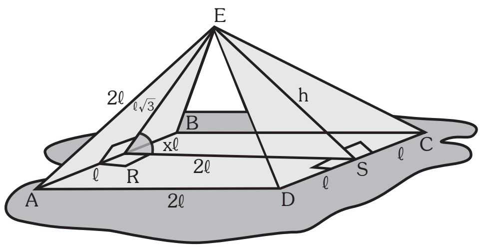
E) 60°

Resolución 29

Ángulo diedro

Ángulo diedro

Piden "x"



Dato: $\dfrac{A\triangle ABE}{A\triangle DEC} = \sqrt{3}$

$$\dfrac{\dfrac{(2\ell)^2\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{2\ell.h}{2}} = \sqrt{3}$$

$$h = \ell$$

- $\triangle$RES: notable de 30° y 60°
  $\therefore x=30°$

Rpta.: 30°

Pregunta 30

ABC es un triángulo circunscrito a una circunferencia, la cual es tangente a los lados del triángulo en los puntos P, Q y R ($P \in \overline{AB}$, $Q \in \overline{BC}$ y $R \in \overline{AC}$). $M \in \overline{AR}$ con $\overline{PM} \perp \overline{AC}$; $N \in \overline{RC}$ con $\overline{QN} \perp \overline{AC}$, $T \in \overline{PQ}$ con $\overline{RT} \perp \overline{PQ}$ y PM>QN. Si RT=4 u y PM+QN=10 u, entonces la longitud de PM (en u) es:

A) 6

B) $\dfrac{13}{2}$

C) 7

D) $\dfrac{15}{2}$

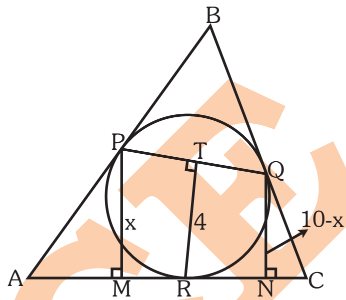
E) 8

Resolución 30

Semejanza de triángulos

Teoremas adicionales

- Piden: x



- Dato PM+QN=10 y PM>QN
  $\rightarrow QN=10-x$
  Teorema Pappus
  $4^2=x(10-x)$
  $x=8$

Rpta.: 8

Pregunta 31

El volumen de un cono de base circular de radio R y altura L es igual al volumen de un cubo de arista 2R. Calcule $\dfrac{R}{r}$, donde r es el radio de la circunferencia menor del tronco de cono de altura R, obtenido del cono de base circular.

A) $\dfrac{64}{64-\pi}$

B) $\dfrac{32}{32-\pi}$

C) $\dfrac{24}{24-\pi}$

D) $\dfrac{12}{12-\pi}$

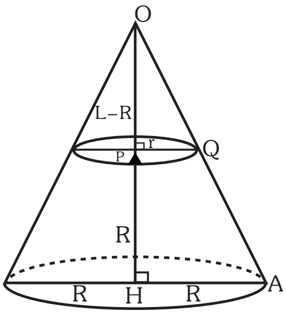
E) $\dfrac{6}{6-\pi}$

Resolución 31

Geometría del espacio

Prisma cono

Piden: $\frac{R}{r}$



Condición: Vcono=Vcubo

$$\frac{1}{3}\pi R^2 L = (2R)^3$$

$$\frac{R}{L} = \frac{\pi}{24} \text{..........(1)}$$

$\triangle$ OPQ ~ $\triangle$ OHA

$$\frac{r}{R} = \frac{L-R}{L} = 1 - \frac{R}{L} \text{..........(2)}$$

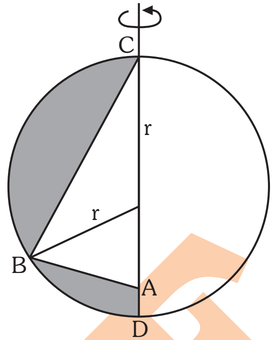
(1) en (2)

$$\frac{R}{r} = \frac{24}{24-\pi}$$

Rpta.: $\frac{24}{24-\pi}$

Pregunta 32

Halle el volumen del sólido que se genera al girar la figura sombreada, alrededor del eje diametral $\overline{CD}$, si $m\overset{\frown}{BC} = 120°$, $r = 2\sqrt[3]{6}$ y $AD = \frac{r}{4}$.



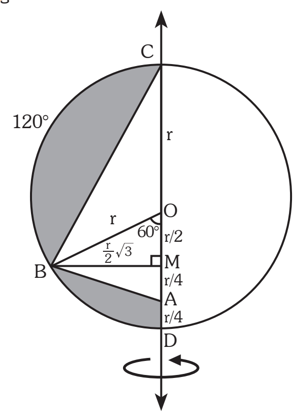
A) 43π
B) 37π
C) 32π
D) 30π
E) 25π

Resolución 32

Sólidos

Esferas

Piden: $V_{\substack{\text{sólido}\\\text{generado}}}$



Dato: $r = 2\sqrt[3]{6}$

$AD = \frac{r}{4}$

$$V_x = V_{esf} - V_{\blacktriangle BMC} - V_{\blacktriangle BMA}$$

$$V_x=\frac{4}{3}\pi r^3-\frac{1}{\cancel{3}}\pi\,\frac{r^2}{4}.\cancel{3}.\frac{3r}{2}-\frac{\pi}{\cancel{3}}.\frac{r^2}{4}.\cancel{3}.\frac{r}{4}$$

$$V_x=\frac{4}{3}\pi r^3-\frac{6\pi r^3}{16}-\frac{\pi r^3}{16}=\frac{64\pi r^3-2\pi r^3}{48}$$

$$V_x=\frac{43\pi}{48}r^3\Rightarrow V_x=\frac{43\pi}{48}.(2\sqrt[3]{6})^3=43\pi$$

Rpta.: 43π

Pregunta 33

De un disco de cartulina de radio R=4 cm, se corta un sector circular de ángulo central θ. Con la parte restante del disco, uniendo los bordes cortados se forma un cono. Si el ángulo en el vértice del cono construido mide 60°; determine cuánto mide el ángulo θ.

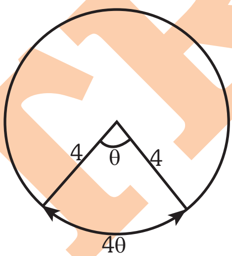
A) 90°
B) 115°
C) 120°
D) 135°
E) 180°

Resolución 33

Sector circular

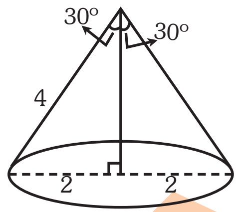
Notables

Disco:



Longitud faltante:
$8\pi-4\theta$

Cono:



Longitud de la base
$2\pi(2)=8\pi-4\theta$
$4\theta=4\pi$
$\theta=\pi=180°$

Rpta.: 180°

Pregunta 34

Determine las coordenadas del foco de coordenadas positivas de la elipse

$4x^2+y^2-8x+4y=8.$

A) $(1,-2-2\sqrt{3})$
B) $(1,-2+2\sqrt{3})$
C) $(1,2+2\sqrt{3})$
D) $(1,4-2\sqrt{3})$
E) $(1,4+2\sqrt{3})$

Resolución 34

Geometría analítica

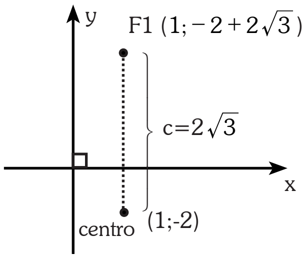
Ecuación de la elipse

Dada la ecuación:
$4x^2+y^2-8x+4y=8$
"completamos cuadrados"
$4(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)=16$
$4(x-1)^2+(y+2)^2=16$

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$$

$\Rightarrow\ a^2=16;\ b^2=4\ ;\ c^2=12$
$c=2\sqrt{3}$

Además el centro de la elipse es (1;-2)



$\therefore$ el foco de coordenadas positivas es $(1,-2+2\sqrt{3})$

Rpta.: $(1,-2+2\sqrt{3})$

Pregunta 35

El área de un sector circular cuyo ángulo central mide 60° es de $24\pi cm^2$. Si triplicamos el radio de dicho sector y disminuimos β radianes a su ángulo central, el área del nuevo sector disminuye un cuarto del anterior. ¿Cuál es el valor, en radianes, de β?

A) $\frac{9}{34}\pi$

B) $\frac{10}{35}\pi$

C) $\frac{11}{36}\pi$

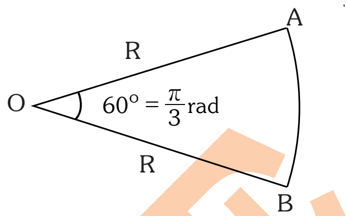
D) $\frac{12}{36}\pi$

E) $\frac{13}{37}\pi$

Resolución 35

Sector circular

Caso 1

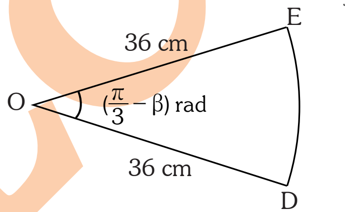


Área $\triangleleft$ AOB$=24\pi$ cm^2

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}.R^2\right)=24\pi \text{ cm}^2$$

$$R = 12 \text{ cm}$$

Caso 2



Área $\triangleleft$ EOD$=18\pi$ cm^2

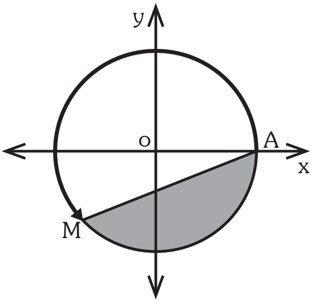
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right).(36 \text{ cm})^2=18\pi \text{ cm}^2$$

$$\beta=\frac{11}{36}\pi$$

Rpta.: $\frac{11}{36}\pi$

Pregunta 36

En la circunferencia trigonométrica del gráfico mostrado el punto M corresponde a un ángulo en posición normal θ. Calcule el área de la región sombreada (en u^2).



A) $\frac{1}{2}(2\pi-\theta+\text{sen}(\theta))$

B) $\frac{1}{2}(2\pi-\theta+\cos(\theta))$

C) $\frac{1}{2}(2\pi+\theta+\text{sen}(\theta))$

D) $2\pi-\theta+\text{sen}(\theta)$

E) $2\pi-\theta+\text{Cos}(\theta)$

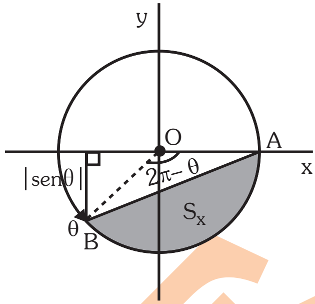
Resolución 36

C. T. Sector circular

S_x = sector AOB – Δ AOB

$$S_x=\frac{1}{2}(2\pi-\theta)(1)^2-\frac{1}{2}\text{x}\,1\,|\text{sen}\theta|$$

$$S_x=\frac{2\pi-\theta+\text{sen}\theta}{2}$$



Rpta.: $\frac{1}{2}(2\pi-\theta+\text{sen}(\theta))$

Pregunta 37

Dados

P=tan (400°)+cos(810°)

Q=cot (760°).sen(450°)

R=tan(1125°).sec(720°)

Indique la alternativa correcta:

A) P>Q>R

B) P>R>Q

C) Q>P>R

D) Q>R>P

E) P=Q=R

Resolución 37

Reducción al primer cuadrante

- $P=\tan 400°+\cos 810° \rightarrow P=\tan 40°+\underbrace{\cos 90°}_{0}$
  $P=\tan 40°$
- $Q=\cot 760°.\,\text{sen}450° \rightarrow Q=\underbrace{\cot 40°}_{\tan 50°}.\,\underbrace{\text{sen}90°}_{1}$
  $Q=\tan 50°$
- $R=\tan 1125°\,\sec 720° \rightarrow R=\tan 45°.\,\underbrace{\sec 0°}_{1}$
  $R=\tan 45°$

$$Q > R > P$$

Rpta.: Q >R > P

Pregunta 38

Sea $f:\left\langle \frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right\rangle \to R$ definida por

$f(x)=2.\mathrm{Cos}^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+4.\cos(x)$.

Determine el rango de f.

A) $\left[-4,\frac{\sqrt{3}}{2}\right\rangle$

B) $\left[-4,\frac{1+4\sqrt{3}}{2}\right\rangle$

C) $\left[-4,\frac{1+2\sqrt{3}}{2}\right\rangle$

D) $\left[-2,\sqrt{3}\right\rangle$

E) $\left[-2,2\sqrt{3}\right\rangle$

Resolución 38

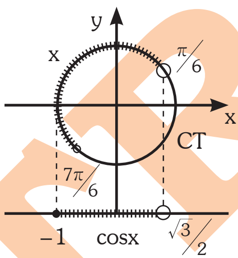
Funciones trigonométricas

Dominio y rango

$f(x)=2\mathrm{sen}^2x+4\cos x$

$f(x)=4-2(\cos x-1)^2 \ldots(\mathrm{I})$

Si: $\frac{\pi}{6}<x<\frac{7\pi}{6}$



$-1\leq \cos x<\frac{\sqrt{3}}{2}$; formando I

$$-4\leq \underbrace{4-2(\cos x-1)^2}_{f(x)}<\frac{1+4\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathrm{Ran}\ f=\left[-4;\frac{1+4\sqrt{3}}{2}\right\rangle$$

Rpta.: $\left[-4;\frac{1+4\sqrt{3}}{2}\right\rangle$

Pregunta 39

Si $\tan(x)+\cot(x)=\frac{5}{2}$ y $M=\frac{\mathrm{sen}(45+x)}{\mathrm{sen}(135+x)}$,

calcule M^2.

A) 2

B) 9

C) 16

D) 25

E) 36

Resolución 39

Ángulos múltiples

Ángulo doble

$$M=\frac{\mathrm{Sen}(45+x)}{\mathrm{Sen}(135+x)}=\frac{\mathrm{Sen}(45+x)}{\mathrm{Cos}(45+x)}\Longrightarrow M^2=\frac{2\mathrm{Sen}^2(45+x)}{2\mathrm{Cos}^2(45+x)}$$

$$M^2=\frac{1-\mathrm{Cos}(90+2x)}{1+\mathrm{Cos}(90+2x)}\to M^2=\frac{1+\mathrm{Sen}2x}{1-\mathrm{Sen}2x}$$

$$\text{pero: }\underbrace{\mathrm{Tanx}+\mathrm{Cotx}}_{\frac{1}{\mathrm{Senx\,Cosx}}}=\frac{5}{2}\to \mathrm{Sen}2x=\frac{4}{5}$$

$$\text{Reemplazando: } M^2=\frac{1+\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}\Longrightarrow M^2=9$$

Rpta.: 9

Pregunta 40

Determine el conjunto A, definido por:

$$A=\left\{x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]/\cos(x)-\cos(3x)<\operatorname{sen}(2x)\right\}$$

A) $\left\langle 0,\frac{\pi}{6}\right\rangle$

B) $\left\langle -\frac{\pi}{2},0\right\rangle$

C) $\left\langle -\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right\rangle$

D) $\left\langle \frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right\rangle$

E) $\left\langle -\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right\rangle$

Resolución 40

Inecuaciones trigonométricas

Circunferencia trigonométrica

$$A=\left\{x\in\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]/\cos x-\cos 3x<\operatorname{sen}2x\right\}$$

$\underbrace{\cos x-\cos 3x}<\operatorname{sen}2x$

transformamos

$2\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}x<\operatorname{sen}2x$

$2\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}2x<0$

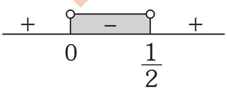
$\underbrace{\operatorname{sen}2x}(2\operatorname{sen}x-1)<0$

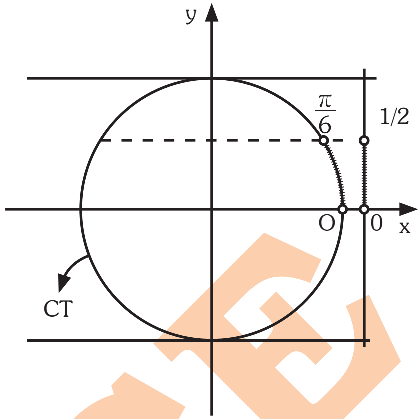
"∢ doble"

$2\operatorname{sen}x\cos x(2\operatorname{sen}x-1)<0$

$\underbrace{\cancel{\cos x}}_{(+)}\operatorname{sen}x(2\operatorname{sen}x-1)<0$

$\operatorname{sen}x(2\operatorname{sen}x-1)<0$





$\therefore\ x\in\left\langle 0;\frac{\pi}{6}\right\rangle$

Rpta.: $\left\langle 0;\frac{\pi}{6}\right\rangle$