Pregunta 01

Sean los conjuntos

A = {$\overline{abcdef}_{(12)}$ / las cifras son consecutivas y crecientes, a>0}

B = {$\overline{abcdef}_{(12)}$ / las cifras son consecutivas y decrecientes}

Halle el número de elementos de A ∪ B.

A) 8
B) 9
C) 10
D) 13
E) 14

Resolución 01

Teoría de conjuntos

Operaciones con conjuntos

Elementos de A

$\overline{abcdef}_{(12)}$

a	b	c	d	e	f
↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11

n(A)=6

Elementos de B

$\overline{abcdef}_{(12)}$

a	b	c	d	e	f
↓	↓	↓	↓	↓	↓
6	5	4	3	2	1
7	6	5	4	3	2
8	7	6	5	4	3
9	8	7	6	5	4
10	9	8	7	6	5
11	10	9	8	7	6

n(B)=7

Como no existe intersección, entonces

n(A∪B)=n(A)+n(B)=13

Rpta.: 13

Pregunta 02

La suma de las cifras de los cuatro últimos dígitos de

$$E = 2 + 22 + \ldots + \underbrace{22\ldots2}_{51\text{ dígitos}} + 3 + 33 + \ldots + \underbrace{33\ldots3}_{51\text{ dígitos}}$$

es:

A) 11
B) 13
C) 16
D) 17
E) 19

Resolución 02

Cuatro operaciones

Adición

$$E = 2+22+...+\underbrace{22...2}_{51\text{ cifras}}+3+33+...+\underbrace{33...3}_{51\text{ cifras}}$$

$$E = 5+55+...+\underbrace{55...5}_{51\text{ cifras}}$$

Sumando en forma vertical:

$$\left.\begin{array}{r} 5\ + \\ 5\ 5 \\ 5\ 5\ 5 \\ 5\ 5\ 5\ 5 \\ \vdots \\ 5\ .\ .\ .\ .\ .\ 5\ 5\ 5\ 5 \\ \hline .\ .\ .\ 7\ 2\ 5\ 5 \end{array}\right\}\ 51 \text{ sumandos}$$

Suma de las últimas 4 cifras: $7+2+5+5=19$

Rpta.: 19

Pregunta 03

Sea r el residuo de dividir

$E = 33^{3n} + 3^{2n} + 3^n + 3$ entre 8.

Determine cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas.

I. $r = 6$, si n es par
II. $r = 6$, si n es impar
III. $r = 2$, si n es impar

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) I y II
E) I y III

Resolución 03

Números primos

Restos potenciales

Los restos potenciales de 3, módulo 8:

$3^0 = \overset{\circ}{8}+1\ ;\ 3^1 = \overset{\circ}{8}+3\ ;\ 3^2 = \overset{\circ}{8}+1\ ;\ 3^3 = \overset{\circ}{8}+3$

Luego: $3^{PAR} = \overset{\circ}{8}+1 \quad ; \quad 3^{IMPAR} = \overset{\circ}{8}+3$

a) Si n es par:

$$E = 3^{PAR}+3^{PAR}+3^{PAR}+3$$
$$= \overset{\circ}{8}+1+1+1+3 = \overset{\circ}{8}+6$$

b) Si n es impar:

$$E = 3^{IMPAR}+3^{PAR}+3^{IMPAR}+3$$
$$= \overset{\circ}{8}+3+1+3+3 = \overset{\circ}{8}+2$$

Son correctas I y III.

Rpta.: I y III

Pregunta 04

Sea la fracción $\frac{a}{3}$ (a y 3 primos entre si), con $a>0$. Al numerador le agregamos el número $A \in \mathbb{N}$ y al denominador 2A; se obtiene una fracción equivalente que es la mitad de la fracción original. Entonces la suma de todos los valores posibles de a es:

A) 4
B) 8
C) 9
D) 12
E) 15

Resolución 04

Números racionales

Fracciones

Sea $f=\frac{a}{3}$ ("a" y 3 son PESI), con a>0

Luego:

$$\rightarrow \frac{a+A}{3+2A}=\frac{1}{2}\times\frac{a}{3};\text{ con } A\in\mathbb{N}$$

$$\frac{a+A}{3+2A}=\frac{a}{6}=\frac{A}{2A-3}$$

$$a=\frac{6A}{2A-3}=3+\frac{9}{2A-3}$$

Como "a" es entero, entonces

$\frac{9}{2A-3}$ es entero.

Luego:

$2A-3\in\{1;3;9\}\rightarrow A\in\{2;3;6\}$

i) $A=2 \quad \rightarrow a=12 \rightarrow f=\frac{12}{3}$ (no es fracción)

ii) $A=3 \quad \rightarrow a=6 \quad \rightarrow f=\frac{6}{3}$ (no es fracción)

iii) $A=6 \quad \rightarrow a=4 \quad \rightarrow f=\frac{4}{3}$ (sí es fracción)

$\therefore\ a=4$

Rpta.: 4

Pregunta 05

Indique la alternativa correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F), según el orden dado:

I. Entre dos números racionales existe al menos un número irracional.

II. El número π se puede expresar exactamente como un número racional $r=\frac{22}{7}$.

III. La suma de dos números irracionales es un número irracional.

A) VVV

B) VVF

C) VFF

D) FVF

E) FFF

Resolución 05

Conjuntos numéricos

Racionales e irracionales

I. El conjunto de números racionales es denso, pero no continuo y en esos espacios vacíos están los irracionales. (V)

II. $\frac{22}{7}$ es la segunda convergencia del valor de π, no es el valor exacto. (F)

III. La operación de adición, en los irracionales, es una operación abierta, es decir, no siempre resulta irracional. (F)

Rpta.: VFF

Pregunta 06

Se dispone de tres recipientes cúbicos cuyos lados de longitud L_1, L_2, L_3 cumplen con la siguiente condición:

$$\frac{L_1}{1}=\frac{L_2}{2}=\frac{L_3}{3}$$

Se pretende distribuir 434 litros de agua entre los tres recipientes, de modo que alcancen el mismo nivel o altura. Determine los litros de agua que recibe el recipiente de longitud L_2.

A) 112

B) 120

C) 124

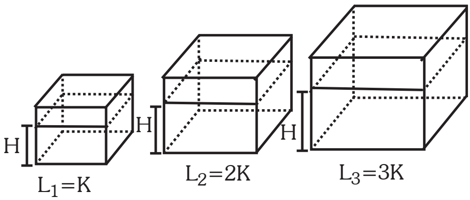
D) 136

E) 146

Resolución 06

Razones y proporciones

Serie de razones



$V_1+V_2+V_3=434$ L

$$\left.\begin{array}{l}V_1=K^2H\\ V_2=4K^2H\\ V_3=9K^2H\end{array}\right\}\begin{array}{l}14K^2H=434\\ K^2H=31\end{array}$$

$\therefore\ V_2=4(31)=124$ L

Rpta.: 124

Pregunta 07

Se elige aleatoriamente un número entero de cinco cifras. Calcule la probabilidad que dicho número sea par y la suma de sus cifras sea 42.

A) $\frac{7}{9}\times10^{-4}$

B) $\frac{11}{9}\times10^{-4}$

C) $\frac{13}{9}\times10^{-4}$

D) $\frac{11}{9}\times10^{-3}$

E) $\frac{13}{9}\times10^{-3}$

Resolución 07

Probabilidad

$\overline{abcde}$ → como el número es par, "e" es par.
→ $a+b+c+d+e=42$

a. Si $e=8$: $a+b+c+d=34\left\{\begin{array}{l}9988\Rightarrow C_2^4=6 \text{ números}\\ 9997\Rightarrow C_1^4=4\text{ números}\end{array}\right.$

b. Si $e=6$: $a+b+c+d=36\ \{9999\Rightarrow 1$ número

$$\text{Probabilidad pedida}=\frac{6+4+1}{90000}=\frac{11}{9}\times10^{-4}$$

Rpta.: $\frac{11}{9}\times10^{-4}$

Pregunta 08

Sean $\alpha,\beta,a,b\in\mathbb{N}$, $N=a^{\alpha}+b^{\beta}$, $M=a^{\alpha+1}b^{\beta+1}$, con a y b primos diferentes. Si N es un cubo perfecto y M es un cuadrado perfecto, entonces indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. El número de divisores de $\sqrt[3]{N}\,.\sqrt{M}$ es impar.

II. El producto $\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)$ es múltiplo de 36.

III. El número de divisores de $\sqrt[3]{N}\,.\sqrt{M}$ es par.

A) V V V

B) V V F

C) F V V

D) F V F

E) F F F

Resolución 08

Números primos

Análisis de los divisores

$N=a^{\alpha}.b^{\beta}=k^3$

$\alpha=\overset{\circ}{3}$

$\beta=\overset{\circ}{3}$

$M=a^{\alpha+1}.b^{\beta+1}=p^2$

$\alpha+1=\overset{\circ}{2} \rightarrow \alpha=\overset{\circ}{2}-1$

$\beta+1=\overset{\circ}{2} \rightarrow \beta=\overset{\circ}{2}-1$

$\alpha=\overset{\circ}{6}-3 \rightarrow \alpha=6n-3$

$\beta=\overset{\circ}{6}-3 \rightarrow \beta=6m-3$

Luego:

$N=a^{6n-3}.b^{6m-3}$

$M=a^{6n-2}.b^{6m-2}$

I. F

$\sqrt[3]{N}\times\sqrt{M}=a^{5n-2}.b^{5m-2}$

$CD=(5n-1)(5m-1)$

CD puede ser par o impar.

II. V

$\alpha.\beta(\alpha+1)(\beta+1)$

$(\overset{\circ}{3})(\overset{\circ}{3})(\overset{\circ}{2})(\overset{\circ}{2})=\overset{\circ}{36}$

III. F

De la proposición I, CD puede ser par o impar.

$\therefore$FVF

Rpta.: FVF

Pregunta 09

Sean as ecuaciones

$y= x^2-3x+4 \wedge y=mx+3.$

Determine los valores reales de m para que nunca se intersequen.

A) $<-5;-1>$

B) $<-5;1>$

C) $<1;5>$

D) $\mathbb{R}\setminus[-5;-1]$

E) $\mathbb{R}\setminus<-5;-1>$

Resolución 09

Funciones

Gráfica de funciones

Las gráficas de las funciones no se intersectan si el discriminante que se obtiene de la ecuación es negativo:

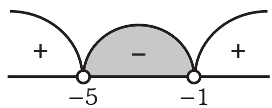
$$x^2-3x+4=mx+3$$

$$x^2-(3+m)x+1=0$$

$$\Rightarrow \Delta<0$$

$$(m+3)^2-2^2<0$$

$$(m+5)(m+1)<0$$



$$\therefore m\in\langle-5;-1\rangle$$

Rpta.: $\langle -5;-1\rangle$

Pregunta 10

Si $E=<-\infty;2]$ es el conjunto solución de la inecuación $|x-a|\leq|x-b|$, $0<a<b$, entonces el menor valor de $(a+b)^2$ es:

A) 8

B) 10

C) 12

D) 14

E) 16

Resolución 10

Valor absoluto

Inecuación de valor absoluto

De la inecuación

$|x-a| \leq |x-b|;\ 0 < a < b$

$(x-a+x-b)(x-a-x-b) \leq 0$

$(2x-a-b)\underbrace{(\cancel{b-a})}_{(+)} \leq 0$

$2x-a-b \leq 0$

$x \leq \dfrac{a+b}{2}$

dato: $x \in \langle -\infty;2]$

luego: $2 \leq \dfrac{a+b}{2}$

$4 \leq a+b$

$16 \leq (a+b)^2$

El mínimo valor es 16.

Rpta.: 16

Pregunta 11

Sea $A=\{z \in \mathbb{C}: 4(z-3)(\bar{z}-3)=|z|^2+15\}$.

Halle $z_o \in A$ tal que $|z_o|$ sea mínimo.

A) -1
B) 1
C) i
D) $-7i$
E) 7

Resolución 11

Números complejos

Gráficos

Del conjunto A se tiene:

$4(Z-3)(\bar{Z}-3)=|Z|^2+15$

$4[|Z|^2-3(Z+\bar{Z})+9]=|Z|^2+15$

$3|Z|^2-12(Z+\bar{Z})+21=0$

$|Z|^2-4(Z+\bar{Z})+7=0...*$

Sea $Z=x+yi$

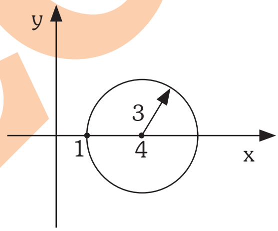
$\bar{Z}=x-yi$

Reemplazamos en *

$\rightarrow x^2+y^2-4(2x)+7=0$

$(x-4)^2+y^2=3^2$

Graficamos



Complejo con menor módulo: $Z_o=(1;0)$

$|Z_o|=1$

Rpta.: 1

Pregunta 12

Dados a, b $\in \mathbb{R}$ y los problemas de programación lineal

Mín $ax+by$ ... (1)　　Máx $ax+by$ ... (2)

sa $(x, y) \in D$　　sa $(x,y) \in D$

Sea (x_o, y_o) solución del problema (1).

Señale la alternativa correcta después de determinar la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones

I. $(-x_o, -y_o)$ es solución del problema (2).
II. Si $D \neq \phi$ entonces las soluciones de los problemas (1) y (2) son distintas.
III. Si las soluciones de los problemas (1) y (2) coinciden entonces $D=\{(x_o, y_o)\}$

A) VVV
B) VFV
C) VVF
D) FFV
E) FFF

Resolución 12

Programación lineal

Solución óptima

De acuerdo con la teoría de programación lineal, tenemos:

I. Falso

Las variables de decisión deben verificar la condición de no negatividad.

II. Falso

Si $D = \{(m;n)\}$ ¡conjunto unitario!, la solución en (1) y (2) serían iguales.

III. Verdadero

Por lo expuesto en II.

Rpta.: FFV

Pregunta 13

Sean $f: [2,4] \to A, f(x)=1-2x$ biyectiva y

$g: A \to B,\ g(x) = \dfrac{7}{x+1}$ biyectiva.

Determine B.

A) $\left[\dfrac{-7}{2}, \dfrac{-7}{6}\right]$

B) $[-7,-3]$

C) $\left[\dfrac{-21}{2}, \dfrac{-25}{6}\right]$

D) $\left[-21, \dfrac{-25}{3}\right]$

E) $[2, 4]$

Resolución 13

Funciones

Clases de funciones

$f: [2;4] \to A;\ f(x) = 1 - 2x$

Como f es biyectiva: $A = \text{rango}(f): 2 \leq x \leq 4$

$\to \text{rango}(f) = A = [-7; -3]$

Luego: $g: A \to B;\ g(x) = \dfrac{7}{x+1}$, también es biyectiva; entonces: $\text{rango}(g) = B$

$-7 \leq x \leq -3$

$\dfrac{-7}{2} \leq \dfrac{7}{x+1} \leq \dfrac{-7}{6}$

$\dfrac{-7}{2} \leq g(x) \leq \dfrac{-7}{6}$

$\text{rango}(g) = \left[\dfrac{-7}{2}; \dfrac{-7}{6}\right] = B$

Rpta.: $\left[\dfrac{-7}{2}, \dfrac{-7}{6}\right]$

Pregunta 14

Al efectuar la división:

$$\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{x-1}$$

el término independiente del cociente que resulta es:

A) $-2n$
B) $-n$
C) 0
D) n
E) 2n

Resolución 14

División algebraica

Ruffini

Aplicando el método de Ruffini:

	1	0	0	0	...	$-n-1$	n
1		1	1	1	...	1	$-n$
	1	1	1	1	...	$\underbrace{-n}$	0

término independiente del cociente $-n$

Rpta.: $-n$

Pregunta 15

Sean a, b, c ∈ $\mathbb{R}$ tales que $0<a<b<c$ y $x_1<x_2$. Siendo (x_1, y_1) y (x_2, y_2) soluciones del sistema de ecuaciones

$y=ax^2+bx+c$

$y=cx^2+bx+a$

entonces podemos afirmar que:

A) $x_1, x_2, y_1, y_2 > 0$

B) $x_1, x_2 < 0\ ;\ y_1, y_2 >0$

C) $x_1, x_2 > 0\ ;\ y_1, y_2 > 0$

D) $x_1 < 0\ ; x_2, y_1, y_2 > 0$

E) $x_1 > 0\ ; y_1, y_2 < 0$

Resolución 15

Sistema de ecuaciones

Sistema no lineal

El sistema dado es:

$y=ax^2+bx+c$......(1)

$y=cx^2+bx+a$......(2)

Efectuando (1)–(2):

$(a-c)x^2-(a-c)=0$

$x^2=1$

$\rightarrow x_1=-1;\ x_2=1$

Por condición $0<a<b<c$

En (1) hacemos $x_1=-1$:

$y_1=a-b+c=a+(c-b)$

De la condición $c-b>0$, con lo cual es evidente que $y_1>0$.

En (1) hacemos $x_2=1$:

$y_2=a+b+c$

De la condición $a+b+c>0$, con lo cual es evidente que $y_2>0$.

Finalmente, $x_1<0;\ x_2,\ y_1,\ y_2>0$.

Rpta.: $x_1<0;\ x_2,\ y_1,\ y_2>0$

Pregunta 16

Determine los puntos de intersección de la gráfica de la función definida por

$f(x)=|x-2|+x^2$ con la recta $3x-2y=-11$

A) (–1, 2), (3, 9)

B) (1, –4), (3, 10)

C) (–1, 4), (3, 10)

D) (–1, 1), (4, 9)

E) (1, –4), (3, 12)

Resolución 16

Funciones

Gráfica de funciones

Sea $f(x)=|x-2|+x^2$

y la recta $3x-2y=-11$

$$\frac{3x+11}{2}=y$$

Igualando para calcular los puntos de intersección:

$$|x-2|+x^2=\frac{3x+11}{2}$$

I) $x-2\geq 0$
$x\geq 2$
$2x^2-x-15=0$
$2x \quad\; 5$
$x \quad -3$
$(2x+5)(x-3)=0$
$\underbrace{x_1=-\frac{5}{3} \qquad x=3}$
NO VERIFICA (3; 10)

II) $x-2<0$
$x<2$
$2x^2-5x-7=0$
$2x \quad -7$
$x \quad +1$
$(2x-7)(x+1)=0$
$\underbrace{x_1=\frac{7}{2} \qquad x=-1}$
NO VERIFICA (–1; 4)

Puntos (3, 10), (–1, 4)

Rpta.: (–1, 4), (3, 10)

Pregunta 17

Halle el valor de "x" si

$$\begin{cases}\log x = \log 1024 - 3\log 2 - \log y\\ 2^{x-y} = 256\end{cases}$$

A) 2
B) 4
C) 8
D) 16
E) 24

Resolución 17

Logaritmos

Ecuaciones logarítmicas

De las ecuaciones:

I. $\log x = \log 1024 - \log 8 - \log y$

$\log x = \log\left(\frac{128}{y}\right) \rightarrow \boxed{x\,.\,y = 128}$ ... (α)

II. $2^{x-y} = 2^8 \rightarrow x-y=8 \rightarrow \boxed{x = y+8}$ ... (β)

Al resolver (β) en (α): $y = 8 \wedge x = 16$

Nos piden: $x = 16$

Rpta.: 16

Pregunta 18

Determine la traza de A si se cumple que

$$(A+I)^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} \text{ y } (A-I)^2=-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

A) 1
B) $\frac{5}{4}$
C) $\sqrt{2}$
D) 2
E) 4

Resolución 18

Matrices

Operaciones con matrices

Del dato:

$$(A+I)^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} \wedge (A-I)^2=-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Como las matrices "A" y "I" son conmutables, podemos usar:

$(A+I)^2-(A-I)^2=4.A.I$

Reemplazando:

$$\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}=4.A \longrightarrow A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Nos piden: $\text{Traz}(A)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

Rpta.: 1

Pregunta 19

Considere la progresión aritmética

$\overline{3a}_{(n)}\,;\, 43_{(n+1)}\,;\, \overline{4a}_{(n+2)}\,;\,\ldots$

donde la suma de los tres primeros términos es mayor que 70. Si "n" es el menor posible, calcule la suma de los primeros 12 términos de esta progresión.

A) 1150
B) 1330
C) 1340
D) 1350
E) 1650

Resolución 19

Conteo de números

Progresión aritmética

Sea la progresión $\underbrace{\overline{3a}_n}_{a_1}, \underbrace{43_{(n+1)}}_{a_2}, \underbrace{\overline{4a}_{(n+2)}}_{a_3}$

- $\overbrace{\underbrace{a_1+a_2+a_3}_{3a_2}}^{a_1+a_3=2a_2}>170 \rightarrow 3(\underbrace{43_{n+1}}_{a_2})>170 \rightsquigarrow n>12,4$
- $a_2-a_1=a_3-a_2 \rightarrow 43_{n+1}-\overline{3a}_n=\overline{4a}_{n+2}-43_{n+1}$

se obtiene $n+6=2a$, "n" es par.

Menor $n=14$; $a=10$

$\underbrace{\overline{3(10)}_{14}}_{52}; \underbrace{43_{15}}_{63}; \underbrace{\overline{4(10)}_{16}}_{74}$

$+11 \quad +11$

Se pide $S=\underbrace{52+63+74+...+173}_{12\text{ sumandos}}$

$S=(52+173)\dfrac{12}{2}=1350$

Rpta.: 1350

Pregunta 20

Considere para cada $n\in\mathbb{N}$ el conjunto

$S_n=\{x\in R: |2x-1|=n+1\}$ y

$A=\{x\in R: |x|<\sqrt{3}\}$

Determine la suma de los valores de "n" de tal forma que se cumpla $S_n\subseteq A$.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

Resolución 20

Números reales

Valor absoluto

Redefiniendo cada conjunto:

$S_n=\left\{\dfrac{n+2}{2}; -\dfrac{n}{2}\right\}$

$A=\langle-\sqrt{3};\sqrt{3}\rangle$

Analizando la condición $S_n\subseteq A$:

$S_1=\left\{\dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{2}\right\}$ ¡Única opción!

$S_2=\{2;-1\}$

$S_3=\left\{\dfrac{5}{2}; -\dfrac{3}{2}\right\}$ $\quad S_n\not\subseteq A$

$\vdots$

Finalmente, el único valor que asume n es 1.

Rpta.: 1

Pregunta 21

En un cuadrilátero convexo ABCD se verifica que $\overline{AB}\cong\overline{BC}\cong\overline{CD}$. Si $m\angle ABD=13\,m\angle DBC$ y $m\angle ADB=6\,m\angle DBC$, halle $m\angle DBC$.

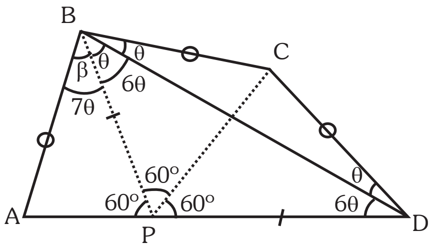
A) 2°
B) 3°
C) 4°
D) 5°
E) 6°

Resolución 21

Congruencia

Congruencia

Piden "θ".



trazamos BP=PD

ΔABP ≅ ΔCBP ≅ ΔCDP

(L.A.L)

→ m∢BPA=m∢BPC=m∢CPD=60º

ΔPBD=12θ=60º

θ=5

Rpta.: 5º

Pregunta 22

Determine la longitud (en cm) del lado de un polígono regular inscrito en una circunferencia C de radio R cm si la longitud del lado de un polígono de doble número de lados inscrito en C es igual a $\frac{R}{2}$ cm.

A) $\frac{\sqrt{15}}{2}R$

B) $\frac{\sqrt{15}}{3}R$

C) $\frac{\sqrt{15}}{4}R$

D) $\frac{\sqrt{15}}{5}R$

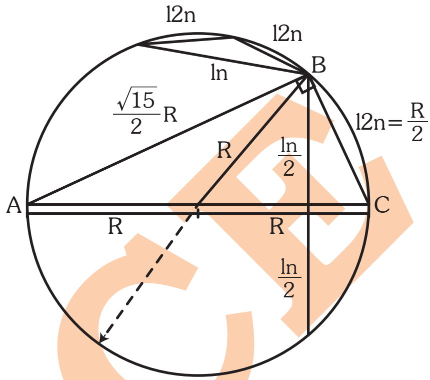
E) $\frac{\sqrt{15}}{6}R$

Resolución 22

Relaciones métricas

R.M. en el triángulo rectángulo

Piden: ln



* Relaciones métricas en el triángulo rectángulo:

$$\frac{\sqrt{15}R}{2}\times\frac{R}{2}=2R\frac{ln}{2}$$

$$\therefore\ ln=\frac{\sqrt{15}R}{4}$$

Rpta.: $\frac{\sqrt{15}}{4}R$

Pregunta 23

En un triángulo ABC, se traza $\overline{BM}$ ($M\in\overline{AC}$) tal que $AM=\frac{3}{4}MC$, por M se traza $\overline{MH}\perp\overline{BC}$ ($H\in\overline{BC}$) y por A se traza $\overline{AE}\perp\overline{BM}$ ($E\in\overline{BM}$). Si MH = 8 u, AE = $6\sqrt{3}$ u y m∠MBC = 30º, calcule el área del triángulo MHC (en u²).

A) $30\sqrt{3}$

B) $32\sqrt{3}$

C) $34\sqrt{3}$

D) $36\sqrt{3}$

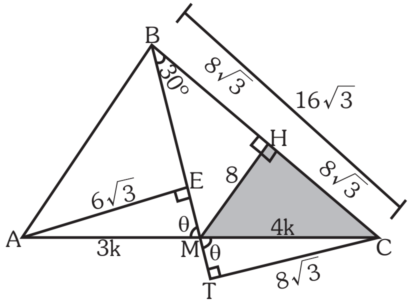
E) $38\sqrt{3}$

Resolución 23

Áreas de regiones poligonales

Áreas de regiones triangulares

Piden área ◺MHC



- ◺AEM ~ ◺CTM

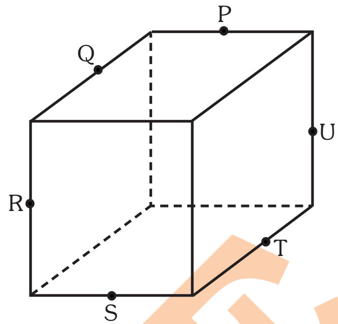
$$\frac{6\sqrt{3}}{TC}=\frac{3K}{4K}\rightarrow TC=8\sqrt{3}$$

- ◺BHM: notable (30° y 60°)
  $\rightarrow BH=8\sqrt{3}$
- ◺BTC: notable (30° y 60°)
  $\rightarrow BC=16\sqrt{3}$
- Área ◺MHC$=\dfrac{8.8\sqrt{3}}{2}=32\sqrt{3}\ u^2$

Rpta.: $32\sqrt{3}$

Pregunta 24

La figura representa un cubo de arista “a” cm. Calcule el área (en cm^2) de la circunferencia que pasa por los puntos P, Q, R, S, T y U teniendo en cuenta que son puntos medios de las aristas.



A) πa^2

B) $\dfrac{\pi a^2}{2}$

C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi a^2$

D) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi a^2$

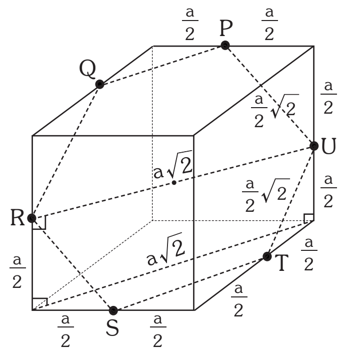
E) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\pi a^2$

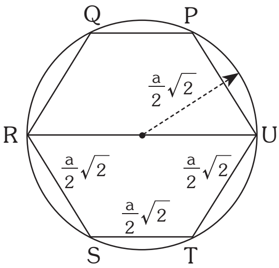
Resolución 24

Geometría del espacio

Poliedros regulares

Piden: A●





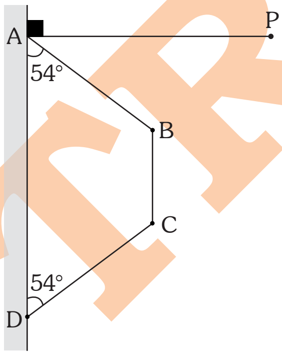
El polígono RQPUTS es un hexágono regular.

$$A_{\bullet} = \pi\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2$$
$$A_{\bullet} = \frac{\pi a^2}{2}$$

Rpta.: $\frac{\pi a^2}{2}$

Pregunta 25

En la figura se tiene una plataforma rígida ABCD en forma de trapecio tal que $AB = DC = 2BC = 20$ cm y una cuerda AP. Calcule (en cm) la longitud recorrida por el extremo P hasta que haga contacto con $\overline{DC}$ sabiendo que $AP = 40$ cm.

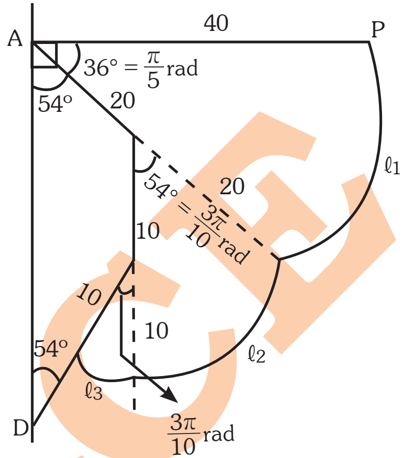


A) 14π
B) 15π
C) 16π
D) 17π
E) 18π

Resolución 25

Circunferencia

Longitud de arco



Piden $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3$

$$\ell_1 = \frac{\pi}{5}.40° = 8\pi$$
$$\ell_2 = \left(3\frac{\pi}{10}\right)20 = 6\pi$$
$$\ell_3 = \left(3\frac{\pi}{10}\right)10 = 3\pi$$

$$\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = 17\pi$$

Rpta.: 17π

Pregunta 26

En un triángulo ABC, en $\overline{AC}$ se ubica un punto H, por dicho punto se traza la perpendicular $\overline{PH}$ a $\overline{AC}$, la cual interseca a $\overline{AB}$ en Q. Si $m\angle PAB = 53°$, $m\angle ACB = 143°$, $AP = AB$ y $AH = 12$m, calcule HC (en m).

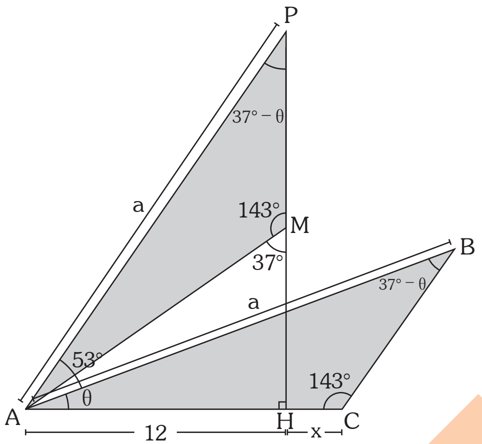
A) 4
B) 6
C) 8
D) 10
E) 12

Resolución 26

Congruencia de triángulos

Caso de congruencias

Piden x.



$\triangle APM \cong \triangle ABC$

◺ AHM = NOTABLE (37° y 53°)

$\rightarrow AM = 20$

Como $\triangle APM \cong \triangle ABC$,

entonces

$AM = AC$

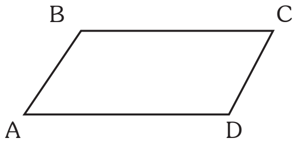
$20 = 12 + x$

$\therefore x = 8$

Rpta.: 8

Pregunta 27

En el paralelogramo ABCD mostrado en la figura $\overline{BD} \perp \overline{DC}$ se ubica un punto P en el interior del triángulo ABD, de modo que $(AP)^2 + (PC)^2 = 55$ y $(PB)^2 + 2(CD)^2 = 30$. Calcule PD.

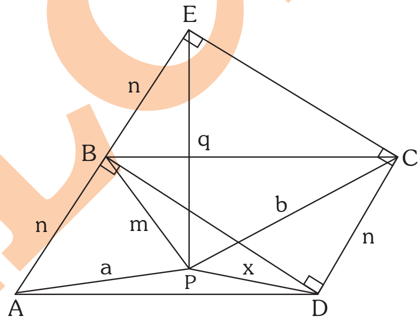


A) 1
B) 3
C) 5
D) 7
E) 9

Resolución 27

Relaciones métricas

Triángulos oblicuángulos



Piden PD = x

Dato: $a^2+b^2=55$

$m^2+2n^2=30$

Trazamos $\overline{CE} \perp \overrightarrow{AB}$

Teorema de Marlen

▭ BECD

$m^2+b^2=x^2+q^2$ ... I

Teorema de la mediana

$\triangle APE$

$a^2+q^2=2m^2+\frac{(2n)^2}{2}$ ... II

Sumando I $\wedge$ II

$a^2+b^2=x^2+m^2+2n^2$

$55=x^2+30 \rightarrow x=5$

Rpta.: 5

Pregunta 28

Desde el punto de vista P se trazan las rectas secantes L_1 y L_2 a una circunferencia C. L_1 corta a C en A y B (AP > BP), L_2 corta a C en E y D (EP > DP). Si AB = 10 cm, ED = 8 cm y BP + DP = 6 cm, determine la longitud (en cm) de $\overline{BP}$.

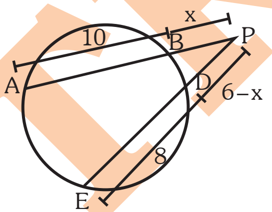
A) 2,8
B) 2,9
C) 3,0
D) 3,1
E) 3,2

Resolución 28

Relaciones métricas

Relaciones métricas en la circunferencia

Piden: x



- BP + DP = 6
  x + DP = 6
  DP = 6 – x

- Por teorema de las secantes:

$x(x+10)=(6-x)(14-x)$

$\cancel{x^2}+10x=84-6x-14x+\cancel{x^2}$

$30x=84$

$\therefore x=2,8$

Rpta.: 2,8

Pregunta 29

En el ángulo triedro trirrectángulo O-ABC, si las áreas de las caras OAB, OBC y OAC miden, respectivamente, S, 2S y 3S; calcule, el área de la región que determina un plano secante a las aristas y que pasa por A, B y C.

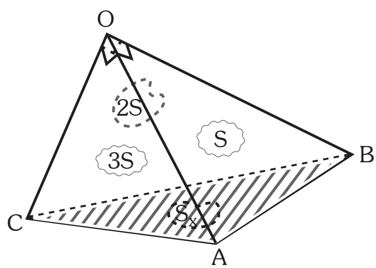
A) $2S\sqrt{2}$
B) $3S\sqrt{2}$
C) $S\sqrt{14}$
D) $2S\sqrt{13}$
E) $S\sqrt{15}$

Resolución 29

Triedros

Triedros trirrectángulos

Piden S_x



Por teorema en triedros trirrectángulos

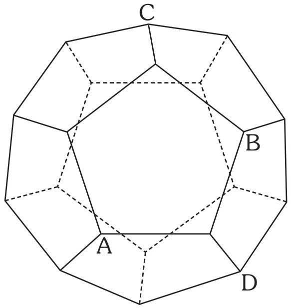
$S_x^2=S^2+(2S)^2+(3S)^2$

$\therefore S_x=S\sqrt{14}$

Rpta.: $S\sqrt{14}$

Pregunta 30

La figura mostrada es un dodecaedro regular. Calcule la medida del ángulo entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.



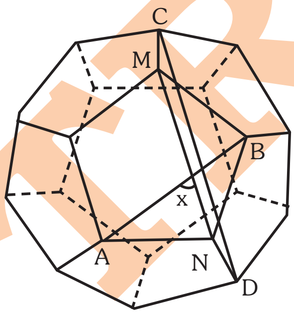
A) 30°
B) 36°
C) 45°
D) 60°
E) 72°

Resolución 30

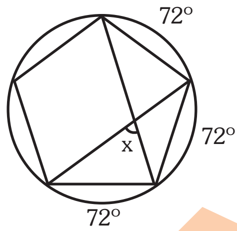
Poliedros

Poliedros regulares

Piden m∢($\overline{AB}$ y $\overline{CD}$).



* $\overline{MN}//\overline{CD}$



* ∢interior

$$x = \frac{72° + 72°}{2} = 72°$$

Rpta.: 72°

Pregunta 31

La superficie lateral de un prisma recto regular triangular es un rectángulo cuya diagonal mide 12 m y su altura $6\sqrt{3}$ m. Calcule el área total del sólido (en m²).

A) $38\sqrt{3}$
B) $39\sqrt{3}$
C) $40\sqrt{3}$
D) $41\sqrt{3}$
E) $42\sqrt{3}$

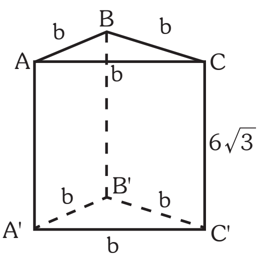
Resolución 31

Prisma

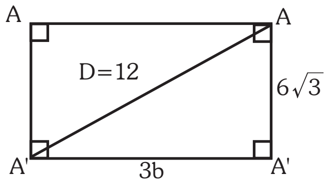
Prisma regular

Piden: A_{tot}.

Se tiene:



Dato: D=12



$\Longrightarrow 3b = 6$ $\qquad\Longrightarrow 2P_{Base} = 6$

$b = 2$

$A_{tot} = A_{lat} + 2A_B$

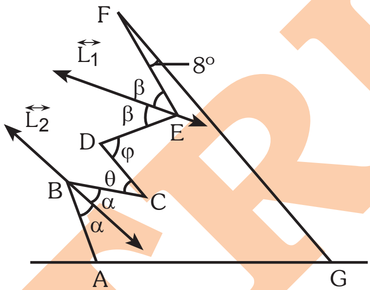
$= 2P_{Base}.6\sqrt{3} + 2\left(\dfrac{2^2\sqrt{3}}{4}\right)$

$= 6.6\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \Longrightarrow A_{tot} = 38\sqrt{3}$

Rpta.: 38$\sqrt{3}$

Pregunta 32

En el gráfico, $\overline{AB}//\overline{FG}$ y $\varphi - \theta = 38^o$. Determine la medida del ángulo formado por $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$.



A) 15º
B) 30º
C) 37º
D) 53º
E) 60º

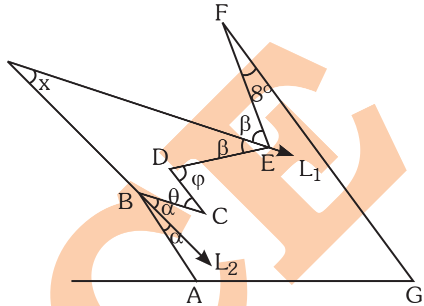
Resolución 32

Ángulos

Ángulos entre paralelas

Piden x

Dato $\varphi - \theta = 38^o$ ... (1)



$\overline{AB} // \overline{FG}$

$2\alpha + \varphi + 8^o = \theta + 2\beta$...(2)

(1) en (2)

$\beta - \alpha = 23^o$ ...(3)

Propiedad

$x = (\varphi + \alpha) - (\beta - \theta)$

$x = (\varphi - \theta) - (\beta - \alpha)$...(4)

(1) y (3) en (4)

$x = 38^o - 23^o$

$x = 15^o$

Rpta.: 15º

Pregunta 33

Al eliminar "α" y "β" de las igualdades

$$p\text{sen}^2(\alpha)+q\cos^2(\alpha)=a$$

$$q\text{sen}^2(\beta)+p\cos^2(\beta)=b$$

$$p\tan(\alpha)=q\tan(\beta)$$

donde $p \neq q$, obtenemos:

A) $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$

B) $p+q=a+b$

C) $p-q=a-b$

D) $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

E) $a+p=q+b$

Resolución 33

Identidades trigonométricas

Eliminación de ángulos

De $p^2\text{Tan}^2\alpha = q^2\text{Tan}^2\beta$

$$p^2\frac{\text{Sen}^2\alpha}{\text{Cos}^2\alpha}=\frac{q^2\text{Sen}^2\beta}{\text{Cos}^2\beta}$$

$$\frac{p\text{Sen}^2\alpha}{q\text{Cos}^2\alpha}=\frac{q\text{Sen}^2\beta}{p\text{Cos}^2\beta}\ (\text{Proporciones})$$

$$\frac{p\text{Sen}^2\alpha+q\text{Cos}^2\alpha}{q\text{Cos}^2\alpha}=\frac{q\text{Sen}^2\beta+p\text{Cos}^2\beta}{p\text{Cos}^2\beta}$$

$$\frac{a}{q\text{Cos}^2\alpha}=\frac{b}{p\text{Cos}^2\beta}\dots(\text{I})$$

De $p\text{Sen}^2\alpha+q\text{Cos}^2\alpha=a\rightarrow$

$$\text{Cos}^2\alpha=\frac{a-p}{q-p}\dots(\text{II})$$

De $q\text{Sen}^2\beta+p\text{Cos}^2\beta=b\rightarrow$

$$\text{Cos}^2\beta=\frac{b-q}{p-q}\dots(\text{III})$$

(II) y (III) en (I)

$\therefore\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

Rpta.: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

Pregunta 34

Sea f: $[-\pi,\pi]\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\cos^4(x)+\text{sen}^2(x)-1$$

¿En cuántos puntos el gráfico de esta función interseca al eje de las abscisas?

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

Resolución 34

Funciones trigonométricas

Circunferencia trigonométrica

$f(x)=\text{Cos}^4(x)+\text{Sen}^2(x)-1;\ x\in[-\pi;\pi]$

f(x) interseca al eje de abscisas cuando $f(x)=0$; entonces

$\text{Cos}^4(x)+\text{Sen}^2(x)-1=0$

$\text{Cos}^4(x)-\text{Cos}^2x=0$

$-\text{Cos}^2(x).\text{Sen}^2(x)=0$

$4\text{Sen}^2(x).\text{Cos}^2(x)=0.(-4)$

$\text{Sen}^22x=0$

$\text{Sen}2x=0$

$\rightarrow x=\left\{-\pi;\frac{-\pi}{2};0;\frac{\pi}{2};\pi\right\}$

$\therefore$ f(x) interseca al eje de abscisas en 5 puntos.

Rpta.: 5

Pregunta 35

Las funciones arccos y arctan se intersecan en el punto P. Calcule la abscisa de P.

A) $\frac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}$

B) $\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+2}}{2}$

C) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

D) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

E) $\frac{2\sqrt{5}+7}{2}$

Resolución 35

F. T. inversas

$$\underbrace{\arccos x}_{\alpha} = \underbrace{\arctan x}_{\alpha}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\cos\alpha = x \qquad \tan\alpha = x$$

Sabemos: $\sec^2\alpha - \tan^2\alpha = 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} - x^2 = 1;\ x^4 + x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}$$

Rpta.: $\dfrac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}$

Pregunta 36

En el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right\rangle$, determine todos los valores de "α" donde se cumple $\csc(\alpha) > \cot(\alpha)$.

A) $\left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$

B) $\left\langle 2\pi, \frac{5\pi}{2} \right\rangle$

C) $\left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{9\pi}{4}, \frac{5\pi}{2} \right\rangle$

D) $\left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle 2\pi, \frac{9\pi}{4} \right\rangle$

E) $\left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle \cup \left\langle 2\pi, \frac{5\pi}{2} \right\rangle$

Resolución 36

Inecuaciones trigonométricas

I. de circunferencias trigonométricas

$\csc(\alpha) > \cot(\alpha);\ \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right\rangle$

$\csc(\alpha) - \cot(\alpha) > 0$

$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$

$0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} \cup \pi < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{2}$

$(0 < \alpha < \pi \cup 2\pi < \alpha < 3\pi) \wedge \frac{\pi}{2} \le \alpha < \frac{5\pi}{2}$

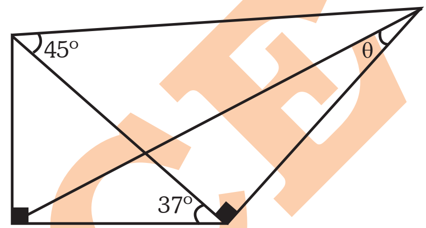
$\rightarrow \frac{\pi}{2} \le \alpha < \pi \cup 2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$

$\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right\rangle \cup \left\langle 2\pi; \frac{5\pi}{2} \right\rangle$

Rpta.: $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right\rangle \cup \left\langle 2\pi; \frac{5\pi}{2} \right\rangle$

Pregunta 37

Dada la figura



calcule $37\tan(\theta)$.

A) 10

B) 12

C) 14

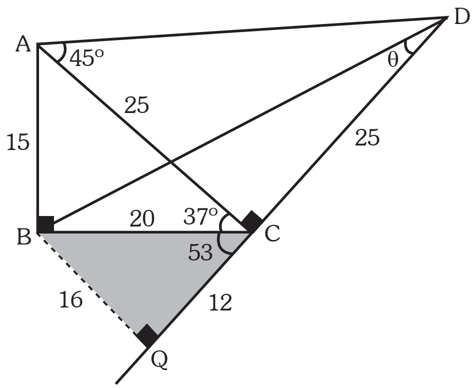
D) 16

E) 18

Resolución 37

Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Ángulos notables



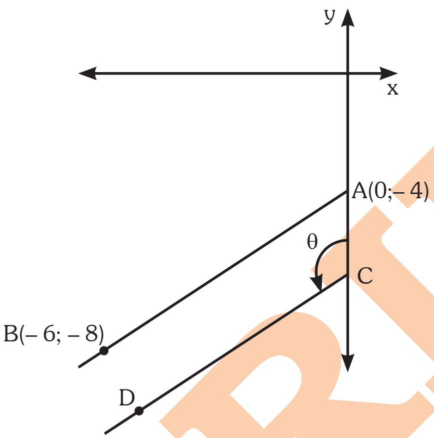
1. $\triangle$ BQC: 37° y 53°
   BC = 20 → BQ = 16 ∧ QC = 12
2. $\triangle$ ABC: 37° y 53°
   Como BC = 20 → AB = 15 ∧ AC = 25
3. $\triangle$ ACD: 45°; 45°
   AC = 25 → CD =25

$\tan\theta = \dfrac{16}{37}$ ($\triangle$ BQD)

Rpta.: 16

Pregunta 38

En el gráfico mostrado, si AB//CD entonces el valor de $\tan(\theta)$ es:



A) $-\dfrac{3}{2}$

B) $-\dfrac{1}{2}$

C) $-\dfrac{1}{3}$

D) $\dfrac{1}{2}$

E) $\dfrac{3}{2}$

Resolución 38

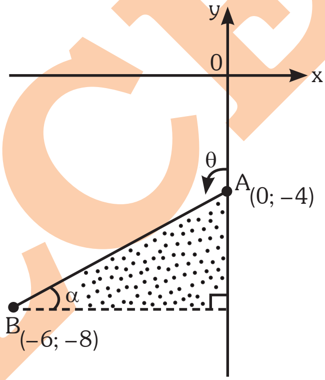
Reducción al primer cuadrante

Ecuación de la recta

Pendiente de AB: $\tan\alpha = \dfrac{-4+8}{0-(-6)} \rightarrow \tan\alpha = \dfrac{2}{3}$

Además: $\theta = 90 + \alpha \rightarrow \tan\theta = -\cot\alpha$

$\therefore \tan\theta = -\dfrac{3}{2}$



Rpta.: $-\dfrac{3}{2}$

Pregunta 39

Dadas las funciones f y g definidas por

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2|x|}{1+x^2}\right);\ g(x) = \arcsen\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$$

determine $\operatorname{Ran}(f) \subset \operatorname{Dom}(g)$.

A) $\left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$

B) $\mathbb{R}$

C) $\langle -\infty; 1]$

D) $[1; +\infty\rangle$

E) $[0; 1]$

Resolución 39

Funciones trigonométricas inversas

Dominio y rango

III. Como: $|x|+\dfrac{1}{|x|}\geqslant 2$

$0\leqslant\dfrac{|x|}{x^2+1}\leqslant\dfrac{1}{2}$

$0\leqslant\dfrac{2|x|}{x^2+1}\leqslant 1$

$\operatorname{arctg}(0)\leqslant f(x)\leqslant\operatorname{arctg}(1)$

$0\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{\pi}{4}$

IV. Como:

$-\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{x}{x^2+1}\leqslant\dfrac{1}{2}$

$\operatorname{Dom}(g)=\mathbb{R}$

V. $\operatorname{Ram}(f)\cap\operatorname{Dom}(g)=\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$

Rpta.: $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$

Pregunta 40 **40**

Dada la ecuación general de la cónica

$\mathbb{C}$: $Ax^2+By^2+Cx+Dy+F=0$ con A, B, C, D, F constantes arbitrarias, se tiene que:

IV. Si $A=B\neq 0$ entonces siempre tenemos la ecuación de una circunferencia.

V. Si $B=0$ y $A\neq 0$ entonces siempre tenemos la ecuación de una parábola.

VI. Si $A-B<0$ y $D^2-4B^2F>0$ entonces siempre tenemos la ecuación de una hipérbola.

Luego, son verdaderas:

A) Solo I
B) Solo II y III
C) Solo II
D) Solo III
E) Solo I y III

Resolución 40

Geometría analítica

Secciones cónicas

VI. Sean $A=1$; $B=1$; $C=2$; $D=4$; $F=20$

$x^2+y^2+2x+4y+20=0$

$(x+1)^2+(y+2)^2=-15$ (Falso)

VII. Sean $B=0$; $A\neq 0$

$Ax^2+Cx+Dy+F=0$ (Verdadero)

VIII. Sean $A=1$; $B=-1$; $C=2\sqrt{5}$; $D=4$; $F=1$

$x^2-y^2+2\sqrt{5}x+4y+1=0$

$(x+\sqrt{5})^2-(y-2)^2=0$ (Falso)

Rpta.: Solo II