### Pregunta 01

Un comerciante adquiere 3 tipos de té: corriente, superior y extra en cantidades de 20, 50 y "x" kilogramos respectivamente, a los precios (en soles por kg) de 8, 10 y 16, en ese orden. Para la venta a sus clientes mezcla los tres tipos de té, cuyo precio medio es S/ 14,00. Calcule la diferencia entre el precio de venta y el precio medio que permite obtener una utilidad de S/ 460,00.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

### Resolución 01

**Regla de mezcla**

*Mezcla inversa*

| Cantidad | Precio |
|---|---|
| 20 kg | S/8 |
| 50 kg | S/10 |
| x kg | S/16 |

$P_M=S/14$

$$\frac{160+500+16x}{20+50+x}=14$$

Resolviendo:

$x=160$

$P_V-P_M=G$; G:utilidad por kilo

$$P_V-P_M=\frac{S/460}{20+50+160}$$

$\therefore P_V-P_M=S/2$

**Rpta.: 2**

### Pregunta 02

Se tiene un grupo de 7 hombres y 4 mujeres. Si se va a elegir una comisión de 3 personas, determine la probabilidad de que la comisión esté integrada al menos por 1 hombre.

A) $\frac{141}{165}$

B) $\frac{152}{165}$

C) $\frac{161}{165}$

D) $\frac{162}{165}$

E) $\frac{163}{165}$

### Resolución 02

**Probabilidades**

H=7 hombres $\wedge$ M=4 mujeres

Debemos elegir 3 personas

$$n(\Omega)=C_3^{11}=\frac{11.10.9}{3.2.1}=165$$

y nos interesa que haya al menos 1 hombre.

$$E=\begin{cases} 1\,H \wedge 2\,M: C_1^7\times C_2^4=7.6=42 \\ 2\,H \wedge 1\,M: C_2^7\times C_1^4=21.4=84 \\ 3\,H \quad : C_3^7 \qquad\qquad\quad =\underline{35} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \ 161 \end{cases}$$

$$\therefore\ P(E)=\frac{n(E)}{n(\Omega)}=\frac{161}{165}$$

**Rpta.:** $\frac{161}{165}$

## Pregunta 03

Indique cuántos de los números $2102111_3$, $1102111_3$, $2112113_5$, $4102112_5$, $2102115_7$ son pares.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

## Resolución 03

### Numeración

### *Paridad de un número*

Se sabe que:

$\overline{abc}_k$ = par

i) Si k = impar → a+b+c = par

ii) Si k = par → c = par

Luego:

- $2102111_3 \rightarrow \sum_{\text{cifras}} = 8$ (cumple)
- $1102111_3 \rightarrow \sum_{\text{cifras}} = 7$ (no cumple)
- $2112113_5 \rightarrow \sum_{\text{cifras}} = 11$ (no cumple)
- $4102112_5 \rightarrow \sum_{\text{cifras}} = 11$ (no cumple)
- $2102115_7 \rightarrow \sum\text{cifras} = 12$ (cumple)

∴ Hay 2 números pares.

***Rpta.: 2***

## Pregunta 04

Halle el valor de a y n si se cumple

$[35_{(n)}]^2 = \overline{aa41}_{(n)}$ , n <12.

Dé como respuesta a + n.

A) 6
B) 8
C) 10
D) 12
E) 14

## Resolución 04

### Numeración

### *Cambio de base*

$[35_{(n)}]^2 = \overline{aa41}_{(n)}$; n < 12

$(\overset{o}{n}+5)^2 = \overset{o}{n}+1$

$\overset{o}{n}+25 = \overset{o}{n}+1$

$24 = \overset{o}{n} = n \cdot k$

⇒ n es divisor de 24, además :

5<n<12 → n = 6

Luego:

$[35_{(6)}]^2 = \overline{aa41}_{(6)}$

$529 = \overline{aa41}_{(6)}$

$2241_{(6)} = \overline{aa41}_{(6)}$

a = 2

∴ a + n = 8

***Rpta.: 8***

## Pregunta 05

Indique la alternativa correcta después de determinar si cada proposición es verdadera (V) o falsa (F), según el orden dado.

I. (∀ a, b ∈ N): Si a > b > 1, entonces $\sum_{k=1}^{n} a^k > \sum_{k=1}^{n} b^k$, $n \in Z^+$

II. (∀ a, b ∈ N)(∀ c ∈ Z): Si a > b, entonces ac > bc.

III. (∀ a, b ∈ Z): $a^2+b^2 \geq 2|ab|$.

A) V V V
B) V V F
C) V F V
D) F F F
E) V F F

**Resolución 05** **05**

**Números reales**

**Desigualdades**

**I.** Como $a>b>1 (\forall a;b \in \mathbb{N})$

$$\left.\begin{array}{ccc} a & > & b \\ a^2 & > & b^2 \\ a^3 & > & b^3 \\ \vdots & & \vdots \\ a^n & > & b^n \end{array}\right\} \text{sumamos}$$

$\sum_{k=1}^{n} a^k > \sum_{k=1}^{n} b^k$ ........................................(V)

**II.** $\forall a;b \in \mathbb{N} \wedge \forall c \in \mathbb{Z}$

Se cumple que:

si $a>b \longrightarrow (ac \geqslant bc \vee ac \leqslant bc)$

dice $a>b \longrightarrow (ac>bc)$.................................(F)

**III.** $\forall a;b \in \mathbb{Z}$

$(|a|-|b|)^2 \geqslant 0$

$|a|^2+|b|^2-2|a||b| \geqslant 0$

$|a|^2+|b|^2 \geqslant 2|a||b|$

$a^2+b^2 \geqslant 2|a||b|$

..............................................(V)

***Rpta.: V F V***

**Pregunta 06**

Halle la suma de las cifras del menor número entero positivo N, sabiendo que admite solo dos divisores primos, el número de divisores simples y compuestos es 6 y la suma de ellos es 42.

A) 1
B) 2
C) 4
D) 5
E) 9

**Resolución 06**

**Números primos**

**Cantidades y suma de unidades**

$CD(N)=(2+2)(1+1)=6$

$N = P_1^2 \times P_2^1$

suma de divisores

$\sigma_{(n)} = \underbrace{(1+P_1+P_1^2)}_{7} \times \underbrace{(1+P_2)}_{6}$

$\therefore P_1 = 2 \wedge P_2 = 5$

$N = 2^2 \times 5^1 = 20$

$\sum \text{cifras}(N) = 2+0 = 2$

***Rpta.: 2***

**Pregunta 07**

Sean a y b números reales positivos tal que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$. Indique la alternativa correcta después de determinar si cada proposición es verdadera (V) o falsa (F) según el orden dado.

I. a es irracional si y solo si b es irracional.
II. ab = 4 si y solo si a + b = 4
III. a < 2 implica que b < 2

A) V V V
B) V V F
C) V F V
D) V F F
E) F V V

**Resolución 07**

**Números reales**

**Números racionales**

Dato: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$

Despejando:

$a=\frac{b}{b-1} \wedge b=\frac{a}{a-1}$

I. Si a es irracional.

$$b=\frac{a}{a-1}=1+\frac{1}{\underbrace{a-1}_{\text{irracional}}}$$

$\rightarrow$ b es irracional

Si b es irracional

$$a=\frac{b}{b-1}=1+\frac{1}{\underbrace{b-1}_{\text{irracional}}}$$

$\rightarrow$ a es irracional (V)

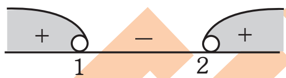
II. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$

$$\underbrace{a+b}_{4}=\underbrace{ab}_{4} \quad \text{(V)}$$

III. Si $a<2 \rightarrow b<2$ (F)

Ya que $a=\frac{b}{b-1}<2$

$$0<\frac{b-2}{b-1}$$



$\rightarrow b \in \langle 0,1\rangle \cup \langle 2;+\infty\rangle$

***Rpta.: VVF***

## *Pregunta 08*

Halle la suma de los dígitos del radicando, donde la diferencia de los dígitos del residuo es 2; además, se tiene la siguiente información:

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{*\ *\ *\ 0\ *\ *\ 9} & *\ *\ *\ * \\
\hline
1 & \\
-\ 6\ * & \\
\ \ *\ * & \\
\ \ 1\ 8\ 0\ * & \\
\ \ *\ *\ *\ * & \\
\ \ -\ -\ 7\ *\ 4\ 9 & \\
\ \ \ \ *\ *\ *\ * & \\
\ \ \ \ -\ -\ *\ * &
\end{array}$$

donde cada * indica un dígito.

A) 25
B) 26
C) 27
D) 28
E) 29

## *Resolución 08*

### Radicación

#### *Raíz cuadrada*

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{1\ 6\ 2\ 0\ 5\ 4\ 9} & 1\ 2\ 7\ 3 \\
\hline
1 & 2\langle 2\rangle \times \langle 2\rangle=44 \\
-6\ 2 & 24\langle 7\rangle \times \langle 7\rangle=1729 \\
\ \ 4\ 4 & 254\langle 3\rangle \times \langle 3\rangle=7629 \\
\ \ 1\ 8\ 0\ 5 & \\
\ \ 1\ 7\ 2\ 9 & \\
\ \ \ \ 7\ 6\ 4\ 9 & \\
\ \ \ \ 7\ 6\ 2\ 9 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 2\ 0 &
\end{array}$$

$\Sigma$ cifras radicando:

$1+6+2+0+5+4+9=27$

***Rpta.: 27***

## *Pregunta 09*

Sea A una matriz cuadrada de orden n tal que $A^4 = 0$, pero $A^3 \neq 0$. Al respecto, se tiene las siguientes afirmaciones.

I. $A + A^2$ es matriz que no tiene inversa.
II. I – A, I matriz identidad, es una matriz que no tiene inversa.
III. $I+A^2$ es una matriz que tiene inversa.

Indique las afirmaciones correctas.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) I y II
E) I y III

### *Resolución 09*

**Matrices**

***Matriz inversa***

Para la primera afirmación:

$A^4=0 \to |A^4|=0 \to |A|^4=0$

$|A|=0$

Sea $B=A+A^2=A(I+A)$

$|B|=|A|.|I+A|=0$

Nótese que $B=A+A^2$ no tiene inversa.

Para la segunda y tercera afirmación:

$A^4=0 \to -A^4=0 \to I-A^4=I$

$I^4-A^4=I \to (I^2+A^2)(I^2-A^2)=I$

$(I+A^2)(I+A)(I-A)=I$

Ahora, considerando el determinante:

$|I+A^2|.|I+A|.|I-A|=1$

Nótese que $I+A^2$ y $I-A$ tienen inversa.

Finalmente tenemos:

I. Verdadera

II. Falsa

III. Verdadera

***Rpta.: I y III***

### *Pregunta 10*

Sean f y g funciones reales de variable real definidas como

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} \text{ y } g(x)=\begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ -1 & x & -1 \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix}$$

Entonces la cantidad de valores de x para los cuales f(x) = g(x) es:

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

E) 4

### *Resolución 10*

**Determinantes**

Para f(x):

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}=x^3-3x+2$$

Para g(x):

$$g(x)=\begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ -1 & x & -1 \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix}=x^3-3x-2$$

En la igualdad:

$f(x)=g(x)$

$x^3-3x+2=x^3-3x-2$

$cs=\varnothing$

$\therefore$ La cantidad de valores para "x" es igual a cero.

***Rpta.: 0***

### *Pregunta 11*

Sean $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ a & 4 & 2 \\ b & c & 4 \end{pmatrix}$ una matriz, y una matriz triangular inferior S de términos positivos, tal que $S\,S^T=A$.

Calcule $K=\dfrac{\text{traza}(S)}{\sqrt{a+b+b}}$.

A) $\frac{1}{2}$

B) 1

C) $\frac{3}{2}$

D) 2

E) 3

### Resolución 11

#### Matrices

Del dato, S es una matriz triangular inferior de términos positivos

$$S=\begin{bmatrix} p & 0 & 0\\ s & q & 0\\ t & w & r\end{bmatrix} \longrightarrow S^T=\begin{bmatrix} p & s & t\\ 0 & q & w\\ 0 & 0 & r\end{bmatrix}$$

Además: $S.S^T = A$; entonces la matriz "A" será:

$$A=\begin{bmatrix} p^2 & p.s & p.t\\ p.s & s^2+q^2 & s.t+q.w\\ p.t & t.s+q.w & t^2+w^2+r^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1\\ a & 4 & 2\\ b & c & 4\end{bmatrix}$$

Igualando los términos homólogos: a=2; b=1; $p=2$; $q=\sqrt{3}$; $r=\sqrt{3}$; $s=1$; $t=\frac{1}{2}$; $w=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Luego la matriz S será:

$$S=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0\\ 1 & \sqrt{3} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3}\end{bmatrix}$$

Nos piden:

$$K=\frac{\text{Traza}(S)}{\sqrt{a+b+b}}=\frac{2+\sqrt{3}+\sqrt{3}}{\sqrt{2+1+1}}=\frac{2(1+\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1}$$

$k = 2$

**Rpta.: 2**

### Pregunta 12

Determine el siguiente conjunto:

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}:\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-2}}{x-5}<0\right\}$$

A) $\langle 2,5\rangle$
B) $[2,5\rangle$
C) $[2,5]$
D) $\langle -3,5\rangle$
E) $[-3,5\rangle$

### Resolución 12

#### Inecuaciones

*Inecuación irracional*

Por condición de existencia:

$2x+1\geq 0 \;\wedge\; x-2\geq 0 \;\wedge\; x-5\neq 0$

$x\geq -\frac{1}{2} \;\wedge\; x\geq 2 \;\wedge\; x\neq 5$

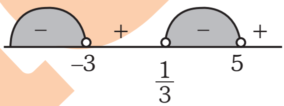
C.V.A. $[2;+\infty\rangle-\{5\}$

En la inecuación:

$$\left(\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-2}}{x-5}<0\right)\times(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-2})$$

$$\frac{(2x+1)^2-(x-2)^2}{x-5}<0$$

$$\frac{(3x-1)(x+3)}{x-5}<0$$




$$x\in\langle-\infty;-3\rangle\cup\left\langle\frac{1}{3};5\right\rangle$$

Luego:

Interceptando con la condición de existencia

$S = [2; 5\rangle$

**Rpta.: $[2;5\rangle$**

### Pregunta 13

Indique el conjunto solución de la inecuación:

$$-\frac{1}{3}<\frac{2x-3}{x+2}<\frac{4}{3}$$

A) $\langle -2,1\rangle$
B) $\left\langle -2,\frac{17}{2}\right\rangle$
C) $\langle -2,2\rangle$
D) $\left\langle 1,\frac{17}{2}\right\rangle$
E) $\left\langle -1,\frac{17}{2}\right\rangle$

***Resolución 13***

**Inecuaciones**

***Inecuación racional***

Descomponiendo:

$$-\frac{1}{3}<2-\frac{7}{x+2}<\frac{4}{3}$$

Aplicando teoremas de desigualdades:

$$-\frac{7}{3}<-\frac{7}{x+2}<-\frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3}<\frac{7}{x+2}<\frac{7}{3}$$

$$\frac{3}{7}<\frac{x+2}{7}<\frac{3}{2}$$

$$3<x+2<\frac{21}{2}$$

$$1<x<\frac{17}{2}$$

$$x\in\left\langle 1;\frac{17}{2}\right\rangle$$

***Rpta.:*** $\left\langle 1;\frac{17}{2}\right\rangle$

***Pregunta 14***

Luego de resolver la inecuación

$$(|4-x|-|5-x|)(|x-4|+|x-5|)\leq x^2-24,$$

obtenga la suma de los enteros que no pertenecen a su conjunto solución.

A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8

***Resolución 14***

**Inecuaciones**

***Valor absoluto***

De la inecuación:

$$(|x-4|-|x-5|)(|x-4|+|x-5|)\leq x^2-25$$

Diferencia de cuadrados:

$$|x-4|^2-|x-5|^2\leqslant x^2-25$$

Desarrollando:

$$(x^2-8x+16)-(x^2-10x+25)\leqslant x^2-25$$
$$x^2-2x-15\geqslant 0$$

Factorizando:

$$(x-5).(x+3)\geqslant 0\rightarrow CS=\langle-\infty;-3]\cup[5;+\infty\rangle$$

Luego los valores enteros que no pertenecen a su conjunto solucion: $-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$

$\therefore$La suma de los valores que no pertenecen al C.S es 7.

***Rpta.: 7***

***Pregunta 15***

Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ sucesiones tales que

$b_n=\begin{vmatrix} a_n & (-1)^n \\ c_n & 1 \end{vmatrix}$ y $c_n=\begin{vmatrix} a_n & (-1)^n \\ b_n & 1 \end{vmatrix}$. Determine

el valor de $E=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n-2b_{2n-1}+c_n)$.

Se sabe que $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=1$.

A) $-1$
B) 0
C) 1/2
D) 1
E) 2

***Resolución 15***

**Series**

***Convergencia***

Según datos:

$$b_n = \begin{cases} a_{2k-1} + c_{2k-1} \; ; k \in Z^+ \\ a_{2k} - c_{2k} \quad ; k \in Z^+ \end{cases}$$

$$C_n = \begin{cases} a_{2k-1} + c_{2k-1} \; ; k \in Z^+ \\ a_{2k} - c_{2k} \quad ; k \in Z^+ \end{cases}$$

$$b_n + c_n = \begin{cases} 2a_{2k-1} + 2c_{2k-1} \; ; k \in Z^+ \\ a_{2k} - 2c_{2k} \quad ; k \in Z^+ \end{cases}$$

Además:

$b_n = a_n - (-1)^n c_n$

$c_n = a_n - (-1)^n b_n$

$c_n = a_n - (-1)^n [a_n - (-1)^n c_n]$

$c_n = a_n - (-1)^n a_n + c_n$

$$a_n = (-1)^n a_n \begin{cases} n \text{ par } a_n \in R \\ n \text{ impar } a_n = 0 \end{cases}$$

Siendo n par:

$$a_{2k} = b_{2k} + c_{2k}$$

Se pide el valor:

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} (a_{2k} + b_{2k} - 2b_{2k-1} + C_{2k})$$

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} 2(a_{2k}) = 2\sum_{k=1}^{\infty} (a_{2k}) = 2.1 = 2$$

***Rpta.: 2***

***Pregunta 16***

Se desea producir anillos de dos tipos A y B. Para cada unidad de anillo de tipo A se empleará 3 g de oro y 1 g de plata, y para el de tipo B se empleará 1 g de oro y 2 g de plata. Se venderán a S/ 1500 y S/ 950 respectivamente cada unidad. Si se cuenta en almacén con 1800 g de oro y 2000 g de plata, ¿cuál será la función objetivo y las restricciones del problema de programación lineal que permita maximizar la ganancia?

A) $Z = 1500x_1 + 950x_2$
$3x_1 + x_2 \le 1800$
$x_1 + 2x_2 \le 2000$
$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$

B) $Z = 950x_1 + 1500x_2$
$3x_1 + 2x_2 \le 1800$
$x_1 + x_2 \le 2000$
$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$

C) $Z = 1800x_1 + 950x_2$
$x_1 + 3x_2 \le 1800$
$2x_1 + x_2 \le 2000$
$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$

D) $Z = 3x_1 + x_2$
$3x_1 + x_2 \le 950$
$x_1 + 2x_2 \le 1500$
$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$

E) $Z = x_1 + 3x_2$
$3x_1 + x_2 \le 1800$
$2x_1 + x_2 \le 2000$
$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$

***Resolución 16***

**Programación lineal**

(*) Del enunciado:

| Anillos | Cantidad | Oro (g) | Plata (g) | Precio (S/) |
|---|---|---|---|---|
| Tipo A | $x_1$ | 3 | 1 | 1500 |
| Tipo B | $x_2$ | 1 | 2 | 950 |
| Total: | | 1800 g | 2000 g | |

(*) Formando las restricciones:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 1800 \\ x_1 + 2x_2 \leq 2000 \\ \quad x_1; x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(*)Luego, la función objetivo:

$Z=1500x_1+950x_2$

***Rpta.:*** $\mathbf{Z=1500x_1+950x_2}$
$\mathbf{3x_1+x_2 \leq 1800}$
$\mathbf{x_1+x_2 \leq 2000}$
$\mathbf{x_1+x_2 \in \mathbb{N}}$

***Pregunta 17***

Sea $f(x)=\dfrac{4x+1}{2x-1}$, $x>1/2$. Halle la función inversa de f denotada por $f^*$ e indique su dominio y rango.

A) $f^*(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$, $\text{Dom}(f^*)=\langle 3,\infty\rangle$, $\text{Rang}(f^*)=\langle -\infty,\infty\rangle$

B) $f^*(x)=\dfrac{x-1}{2x-4}$, $\text{Dom}(f^*)=\langle 3,\infty\rangle$, $\text{Rang}(f^*)=\left\langle \dfrac{1}{2},\infty\right\rangle$

C) $f^*(x)=\dfrac{x+1}{2x-4}$, $\text{Dom}(f^*)=\langle 2,\infty\rangle$, $\text{Rang}(f^*)=\left\langle \dfrac{1}{2},\infty\right\rangle$

D) $f^*(x)=\dfrac{x+1}{2x-4}$, $\text{Dom}(f^*)=\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $\text{Rang}(f^*)=\left\langle \dfrac{1}{2},\infty\right\rangle$

E) $f^*(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$, $\text{Dom}(f^*)=\langle 1,\infty\rangle$, $\text{Rang}(f^*)=\left\langle \dfrac{1}{2},\infty\right\rangle$

***Resolución 17***

**Funciones**

***Función inversa***

Dada que la función $f(x)=\dfrac{4x+1}{2x-1}$ es homográfica, tiene inversa.

Calculando el rango:

$y=2+\dfrac{3}{2x-1}$

$x>\dfrac{1}{2}$

$2x>1$

$2x-1>0$

$\dfrac{1}{2x-1}>0$

$2+\dfrac{3}{2x-1}>2$

Luego $y>2$

$R_f=\langle 2;+\infty\rangle$

Calculando la regla de correspondencia de f*:

$y=\dfrac{4x+1}{2x-1}$

$2yx-y=4x+1$

$2yx-4x=y+1$

$x(2y-4)=y+1$

$x=\dfrac{y+1}{2y-4}$

$f_{(x)}{}^*=\dfrac{x+1}{2x-4}$

$D_f{}^*=\langle 2;+\infty\rangle$

$R_f{}^*=\left\langle \dfrac{1}{2};+\infty\right\rangle$

***Rpta.:*** $\boldsymbol{f^*(x)=\dfrac{x+1}{2x-4}}$, $\boldsymbol{\text{Dom}(f^*)=\langle 2,\infty\rangle}$, $\boldsymbol{\text{Rang}(f^*)=\left\langle \dfrac{1}{2},\infty\right\rangle}$

***Pregunta 18***

Sea f una función cuya regla de correspondencia es $f(x)=\text{Log}_{1/2}(4-|x|)$.

Halle el rango de la función f.

A) $\langle -\infty,+\infty\rangle$

B) $\langle 0;+\infty\rangle$

C) $[-2,2]$

D) $[-2,+\infty\rangle$

E) $[2,+\infty\rangle$

### *Resolución 18*

**Funciones**

***Funciones Logarítmicas***

$\forall x \in R;\ |x| \geq 0$

$-|x| \leq 0$

$4-|x| \leq 4$ ... $(\alpha)$

Si $0<a<b \rightarrow \log_{\frac{1}{2}} a > \log_{\frac{1}{2}} b$

En $(\alpha)$: $\log_{\frac{1}{2}}(4-|x|) \geq \log_{\frac{1}{2}} 4$

$F(x) \geq -2;\ Ran(F)=[-2;+\infty\rangle$

***Rpta.: [–2,+∞⟩***

### *Pregunta 19*

Resuelva la ecuación

$$(|iz+4|+|\bar{z}+4i|)|\bar{z}+\overline{2i}|=0,\ z \in \mathbb{C}.$$

Dé como respuesta la suma de los módulos de las raíces.

A) 2
B) 4
C) 6
D) 8
E) 10

### *Resolución 19*

**Números complejos**

***Operaciones con complejos***

De la ecuación:

$(|i.Z+4|+|\bar{Z}+4.i|)\ |\bar{Z}+\overline{2.i}\ |=0\ ;\ Z \in \mathbb{C}$

Para que el producto de los factores sea cero, entonces:

$|i.Z+4|+|\bar{Z}+4.i|=0 \vee \bar{Z}+\overline{2i}=0$

$(iZ+4=0 \wedge \bar{Z}+4i=0) \vee \bar{Z}=-\overline{2i}$

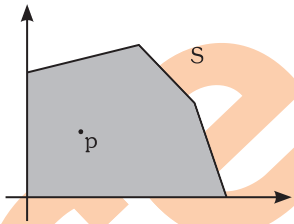
$Z=4i \wedge Z=4i$ $\qquad$ $Z_2=-2i \rightarrow |Z_2|=2$

$Z_1=4i \rightarrow |Z_1|=4$ $\qquad$ $\therefore\ |Z_1|+|Z_2|=6$

***Rpta.: 6***

### *Pregunta 20*

Sea $f:\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función lineal no constante, S un conjunto que se muestra en la figura y sea $p \in S$. Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).




I. $\min\limits_{x \in S} f(x)=f(p)$

II. $\min\limits_{x \in S} f(x)<f(p)$

III. $\max\limits_{x \in S} f(x)=f(p)$

IV. $\max\limits_{x \in S} f(x)>f(p)$

A) F F F F
B) V F V F
C) F V F V
D) V V F F
E) V F F V

### *Resolución 20*

**Programación lineal**

***Optimización***

Por condición $p \in S$, con lo cual el punto p puede estar ubicado en el interior O en la frontera de la región admisible.

I. Falsa

En efecto, f(p) no necesariamente es el mínimo.

II. Falsa

En efecto, f(p) puede ser el mínimo.

III. Falsa

En efecto, f(p) no necesariamente es el máximo.

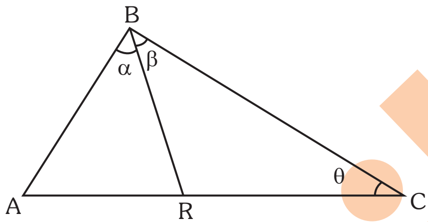
IV. Falsa

En efecto, f(p) puede ser el máximo.

***Rpta.: FFFF***

## Pregunta 21

En la figura, si $\beta = \alpha + \theta$, AB = RC, entonces se cumple:




A) $\beta + \theta = 90°$

B) $\alpha + \theta = 90°$

C) $2\beta + \theta = 180°$

D) $2\alpha + \beta = 180°$

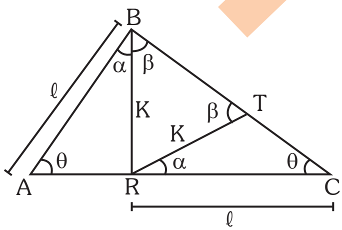
E) $\alpha + \beta = 60°$

## Resolución 21

### Congruencia

### Casos de congruencia

Piden la relación correcta.




Dato: $\beta = \alpha + \theta$

*$RT = BR$

*$\triangle ABR \cong \triangle CRT$

$\rightarrow m\measuredangle BAR = m\measuredangle RCT = \theta$

*$\triangle ABC$:

$2\theta + \alpha + \beta = 180°$

$2\theta + \beta - \theta + \beta = 180°$

$\therefore 2\beta + \theta = 180°$

***Rpta.: $2\beta+\theta=180°$***

## Pregunta 22

En un trapecio ABCD ($\overline{BC} \parallel \overline{AD}$), se tiene que AB = 5 cm , BC = 6 cm , CD = 7 cm y AD = 10 cm. Un segmento limitado por los lados no paralelos determina dos trapecios. Calcule la longitud de dicho segmento, en cm, si las regiones limitadas por los trapecios mencionados tienen igual perímetro.

A) 26/12

B) 26/3

C) 26/2

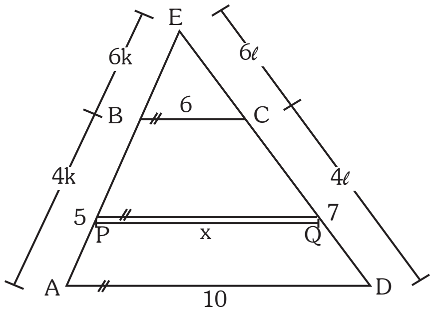
D) 26

E) 27

## Resolución 22

### Semejanza

Piden: x




- $\Delta BEC \sim \Delta AED$

$$\Longrightarrow \frac{BE}{AE} = \frac{6}{10} \longrightarrow \begin{matrix} BE = 6k \\ AE = 10k \end{matrix}$$

Dato: BP+CQ+6+x=5–BP+7–CQ+x+10

$\rightarrow$ BP + CQ = 8

- $\Delta PEQ \sim \Delta AED$

$$\frac{x}{10}=\frac{6k+BP+6\ell+CQ}{10K+10\ell}$$

$$\frac{x}{10}=\frac{8+6(K+\ell)}{10(K+\ell)}$$

$$\begin{aligned} 4k &= 5 \\ 4\ell &= 7 \\ \hline 4(K+\ell) &= 12 \end{aligned} \;\Big\downarrow +$$

$\longrightarrow$ $K+\ell = 3$

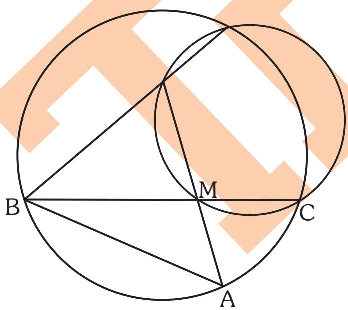
$$\frac{x}{10}=\frac{8+6(3)}{10(3)}$$

$$\therefore\ x=\frac{26}{3}$$

**Rpta.: 26/3**

## Pregunta 23

Según el gráfico, AM = 1u , AC = 2u y AB = 3 u. Calcule BC (en u).

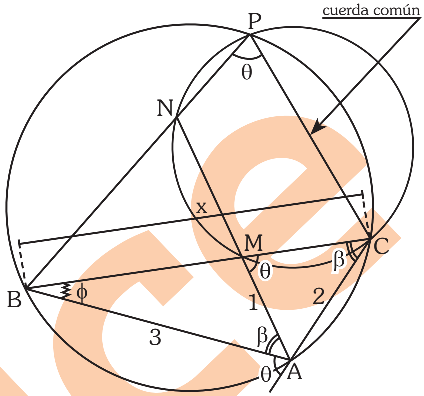



A) 4
B) $\sqrt{17}$
C) 5
D) 6
E) 7

## Resolución 23

### Semejanza

Piden BC = x.




$\left.\begin{array}{l} \square BPCA \\ \square MNPC \end{array}\right\}$ cuadrilátero inscrito

$\triangle BMA \sim \triangle BAC$

$$\frac{3}{x}=\frac{1}{2}$$

$\therefore x = 6$

**Rpta.: 6**

## Pregunta 24

En cuánto excede la suma de las medidas de los ángulos de todas las caras de un dodecaedro regular a la suma de las medidas de los ángulos de todas las caras de su poliedro conjugado.

A) 2600°
B) 2880°
C) 3600°
D) 3880°
E) 4600°

## *Resolución 24*

### Poliedros

#### *Poliedros regulares*

Piden "x".

- En el dodecaedro son 12 caras pentagonales.
- En el icosaedro son 20 caras triangulares.

$\Rightarrow \quad x = 12 \times 540^{o} - 20 \times 180^{o}$

$\therefore \quad x = 2880^{o}$

***Rpta.: 2880º***

## *Pregunta 25*

Recortando las esquinas de una hoja de cartón de forma cuadrada, se construye un prisma (sin tapa) de base cuadrada. Si el lado del cartón mide $\ell$ cm, determine (en $cm^3$) el volumen de dicho prisma. Se sabe que la base del prisma mide "x" cm.

A) $x(\ell - x)^2$

B) $\left(\frac{x}{2}\right)^2(\ell - x)$

C) $\frac{x}{2}(\ell - x)^2$

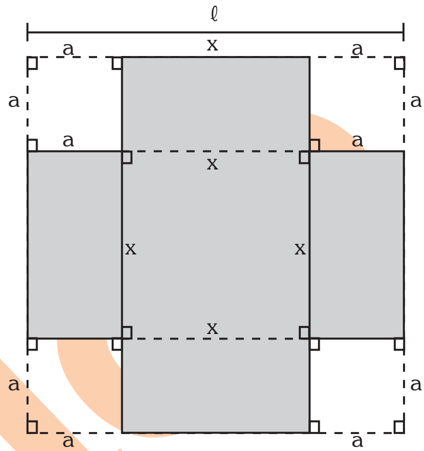
D) $\frac{1}{2}x^2(\ell - x)$

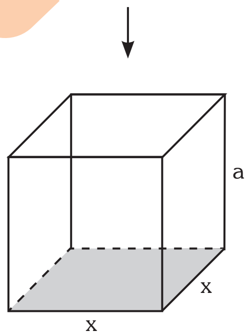
E) $x^2(\ell - x)$

## *Resolución 25*

### Prisma

#### *Prisma recto*




Piden volumen del prisma recto

$2a + x = \ell$

$a = \frac{\ell - x}{2}$

$\therefore$ Volumen del prisma recto $= x^2 . (\frac{\ell - x}{2})$

***Rpta.:*** $\frac{1}{2}x^2(\ell - x)$

### Pregunta 26

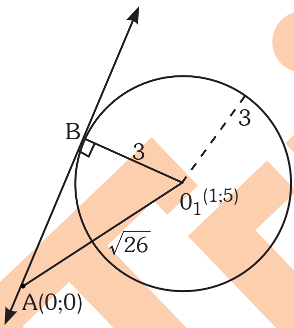
Dada una circunferencia de radio 3u y centro en el punto (1; 5) , determine la longitud (en u) de la porción de la tangente trazada del origen de coordenadas XY a dicha circunferencia.

A) 4
B) $\sqrt{17}$
C) $\sqrt{19}$
D) $2\sqrt{5}$
E) $\sqrt{21}$

### Resolución 26

**Geometría analítica**

***Distancia entre dos puntos***




Piden AB

$A0_1=\sqrt{(5-0)^2+(1-0)^2}$

$A0_1=\sqrt{26}$

$\triangle AB0_1$:

$AB^2+3^2=\sqrt{26}^2$

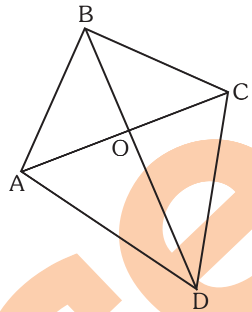
$AB=\sqrt{17}$

**Rpta.:** $\sqrt{17}$

### Pregunta 27

En la figura mostrada, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se cortan en el punto "O". Si se sabe que AB +BC + CD + DA = 20, determine el intervalo de mayor longitud al cual pertenece

$$K=\frac{AC+BD}{10}.$$

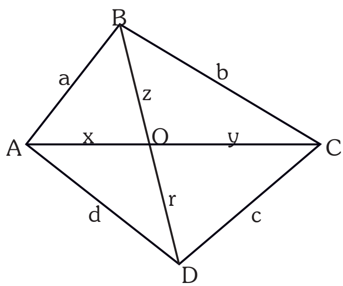



A) $\left\langle\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right\rangle$
B) $\left\langle\frac{1}{2};2\right\rangle$
C) $\left\langle\frac{3}{4};2\right\rangle$
D) $\langle 1;2\rangle$
E) $\langle 1;3\rangle$

### Resolución 27

**Cuadrilátero**

***Existencia***




Dato: a+b+c+d = 20

Piden: $K=\frac{AC+BD}{10}$

- $K = \dfrac{x+y+z+r}{10}$
- Por existencia del triángulo

$$\begin{array}{l} \triangle\, ABO: a < x+z \\ \triangle\, BOC: b < z+y \\ \triangle\, COD: c < y+r \\ \triangle\, AOD: d < x+r \\ \hline \quad 20 < 2(x+y+z+r) \\ \quad 10 < x+y+z+r \qquad \text{... I} \end{array} \; +$$

- Por existencia del triángulo

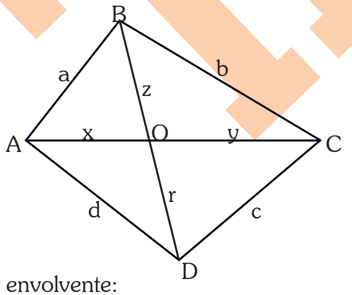
$$\begin{array}{l} \triangle\, ABC: x+y < a+b \\ \triangle\, ADC: x+y < d+c \\ \triangle\, ABD: z+r < a+d \\ \triangle\, BCD: z+r < b+c \\ \hline \quad 2(x+y+z+r) < 2(a+b+c+d) \\ \quad x+y+z+r < a+b+c+d \\ \quad x+y+z+r < 20 \qquad \text{...II} \end{array} \; +$$

De las desigualdades I y II

$$10 < x+y+r+z < 20 \quad \div 10$$

$$1 < \frac{x+y+r+z}{10} < 2$$

$\boxed{1 < k < 2}$ ... III



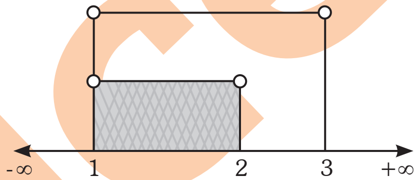

Por la envolvente:

$$\begin{array}{l} a < x+z < b+c+d \\ b < z+y < a+c+d \\ c < r+y < a+b+d \\ d < x+r < a+b+c \\ \hline 20 < 2(x+y+z+r) < 3(20) \\ 10 < \quad x+y+z+r \ < 30 \quad \div 10 \end{array} \; +$$

$$1 < x+y+z+r < 3$$

$\boxed{1 < k < 3}$ ...IV

De las desigualdades III y IV




$1 < K < 2$

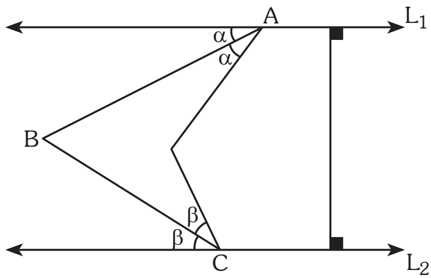
$K \in \langle 1; 2 \rangle$

Dada las claves, el intervalo de mayor longitud que contiene a K es: ⟨1; 3⟩

***Rpta.:* ⟨*1; 3*⟩**

## *Pregunta 28*

En la siguiente figura:




Calcule m∢ABC en términos de α y β.

A) $90^\circ - \frac{\alpha+\beta}{4}$

B) $90^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}$

C) $\frac{\alpha+\beta}{2}$

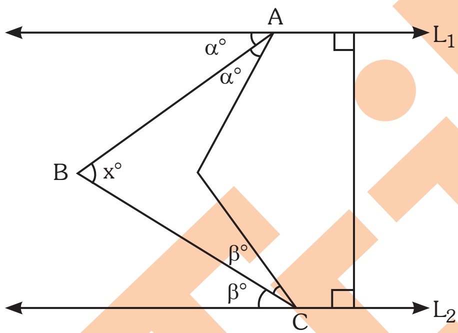
D) $\alpha+\beta$

E) $90^\circ + \frac{\alpha+\beta}{2}$

**Resolución 28**

**Ángulos entre paralelas**

***Teoremas***



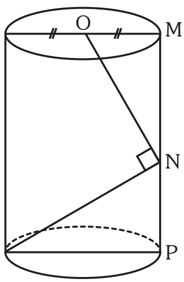

Piden "x".

$x^\circ=\alpha^\circ+\beta^\circ$

***Rpta.:*** $\alpha+\beta$

**Pregunta 29**

Dada la siguiente figura, MN = 5u, NP = 7u, O el centro de la circunferencia.




Calcule el volumen (en $u^3$) del cilindro recto.

A) $85\pi$

B) $90\pi$

C) $180\pi$

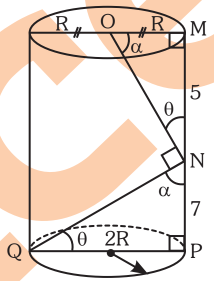
D) $200\pi$

E) $210\pi$

**Resolución 29**

**Cilindro**

***Cilindro de revolución***




- Pide: Volumen

$V = \pi R^2 h \qquad h = 12$

- $\triangle$ OMN ~ $\triangle$ NPQ

$\frac{5}{2R} = \frac{R}{7} \qquad R^2 = \frac{35}{2}$

$V = \pi\frac{35}{2}\times 12 = 210\pi$

***Rpta.: 210π***

**Pregunta 30**

Calcule a qué distancia del centro de una esfera de radio $r=(2+\sqrt{5})$ m se debe seccionar con un plano para que la diferencia de las áreas de los casquetes esféricos determinados sea igual al área de la sección que divide a la esfera en dichos casquetes.

A) 0,6 m

B) 0,8 m

C) 1 m

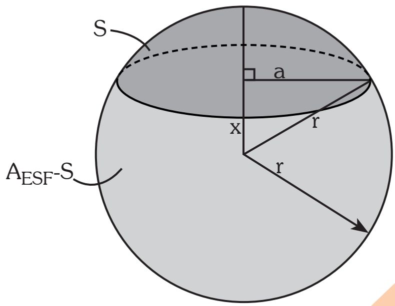
D) 1,2 m

E) 1,5 m

### Resolución 30

**Esfera**

***Casquete esférico***




Pide "x".

- Según el dato $r=(2+\sqrt{5})$.

$\pi a^2=(A_{ESF}-S)-S$

$S=\frac{\pi}{2}(4r^2-a^2)$...... (I)

pero $x^2+a^2=r^2$ .....(II)

$S=2\pi\, r(r-x)$ ...........(III)

- Reemplazando II y III en I:

$2\pi r(r-x)=\frac{\pi}{2}(3r^2+x^2)$

$\therefore$ x=1 m

***Rpta.: 1 m***

### Pregunta 31

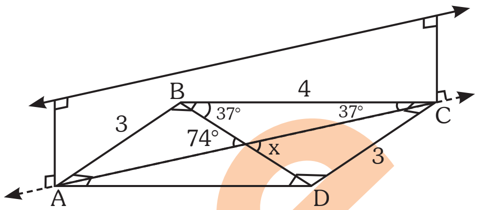
Se tiene un rectángulo cuyos lados miden 3 m, 4 m y una recta en el espacio paralela al plano del rectángulo. Desde dos puntos de la recta se trazan perpendiculares a dicho plano; los pies de estas perpendiculares están en una diagonal del rectángulo. Halle el ángulo de la recta con la otra diagonal del rectángulo.

A) arc cos(3/25)
B) arc cos(1/5)
C) arc cos(6/25)
D) arc cos(7/25)
E) arc cos(9/25)

### Resolución 31

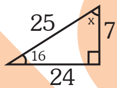
**Geometría del espacio**

***Rectas alabeadas***




Piden "x".

$x\approx 74°$




cosx=7/25

$\therefore$ x=arccos (7/25)

***Rpta.: arccos (7/25)***

### Pregunta 32

Se tienen 2 polígonos regulares cuyas sumas de ángulos internos difieren en 2160° y cuyos ángulos centrales difieren en 5°. Indique el número de lados del polígono más pequeño.

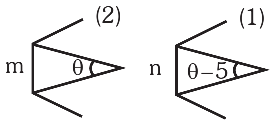
A) 16
B) 18
C) 20
D) 22
E) 24

### *Resolución 32*

**Polígonos**

***Teoremas***

Piden: m




Sea:

n: # lados polígono (1)

m: # lados polígono (2)

$m<n$

$*180\,(n-2)-180°(m-2)=2160°$

$n-m=12°....(1)$

$*\,\dfrac{360}{m}-\dfrac{360}{n}=5°$

$72°\left(\dfrac{n-m}{nm}\right)=1...(2)$

(1) en (2)

$72\times12=nm$

$36\times24=n\,m$

$n=36$

$\therefore\ m=24$

***Rpta.: 24***

### *Pregunta 33*

Simplifique:

$$K=\sqrt{3\left(ctg60^{o}+tg27^{o}\right)\left(ctg60^{o}+tg33^{o}\right)}$$

A) 2
B) 4
C) 5
D) 6
E) 1

### *Resolución 33*

**Identidades de la suma y diferencia de ángulos**

***Identidades auxiliares***

$K=\sqrt{3\,(ctg60^{o}+tg27^{o})\,(ctg60^{o}+tg33^{o})}$

$K=\sqrt{3\,(tg30^{o}+tg27^{o})\,(tg30^{o}+tg33^{o})}$ ;

usamos $tgx+tgy=\dfrac{sen\,(x+y)}{cos\,x.\,cos\,y}$

$$K=\sqrt{3.\frac{\cancel{sen57^{o}}}{cos\,30^{o}.\,\cancel{cos\,27^{o}}}.\frac{\cancel{sen63^{o}}}{cos\,30^{o}.\,\cancel{cos\,33^{o}}}}$$

(por r.t. complementarios)

$$k=\sqrt{3.\frac{1}{cos^{2}30^{o}}}$$

$k=2$

***Rpta.: 2***

### *Pregunta 34*

La distribución diaria de luz solar durante el año en Lima está dada por una función de la forma

$$f(t)=A\ sen(\omega(t\text{-}\alpha))+\beta\ \text{horas}\ ,$$

donde “t” es el número de días transcurridos del año. El día más largo tiene 12 h de luz; el día más corto, 10 h; y se sabe que el 23 de febrero hubo 11 h de luz. ¿Cuál de las siguientes funciones describe explícitamente f (τ)?

A) $4sen\left(\dfrac{2\pi}{365}(\tau-23)\right)+11$

B) $3sen\left(\dfrac{2\pi}{366}(\tau-11)\right)+23$

C) $2sen\left(\dfrac{2\pi}{365}(\tau-54)\right)+23$

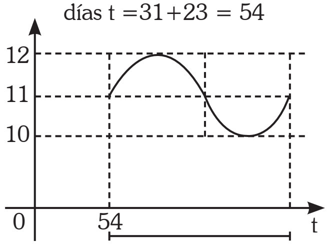
D) $sen\left(\dfrac{2\pi}{365}(\tau-54)\right)+11$

E) $\dfrac{1}{2}sen\left(\dfrac{2\pi}{366}(\tau-23)\right)+54$

***Resolución 34***

**Funciones trigonométricas**

días t =31+23 = 54




$f(t) = A\text{sen}(wt - w\alpha) + \beta$

$A = 1$

$\beta = 11$

$T = \dfrac{2\pi}{w} = 365 \qquad w = \dfrac{2\pi}{365}$

$\alpha = 54$

$f(t) = \text{sen}\left(\dfrac{2\pi}{365}(t-54)\right) + 11$

***Rpta.:*** $\text{sen}\left(\dfrac{2\pi}{365}(t-54)\right) + 11$

***Pregunta 35***

Determine el conjunto solución de la inecuación $|\text{arc sen}(x)| - 2\ \text{arc tan}\ (x) < 0$

A) $\langle -1; 0]$

B) $\langle -1; 1\rangle$

C) $\langle 0; 1\rangle$

D) $[0; 1]$

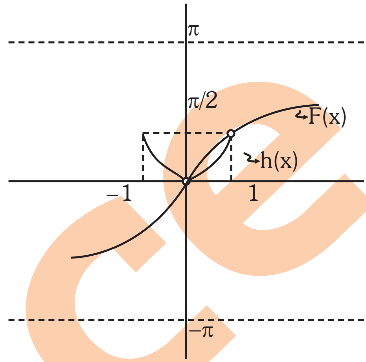
E) $\langle -1; 1]$

***Resolución 35***

**Inecuaciones trigonométricas**

***Funciones inversas***

Graficando:




- Del enunciado:

$|\text{arcsen}(x)| - 2\text{arctan}(x) < 0$

$|\text{arcsen}(x)| < 2\text{arctan}(x)$

- Para hallar punto de intersección:

$h(x) = F(x)$

$\text{arcsen}(x) = 2\text{arctan}(x)$

Resolviendo: $x = 1$

Del gráfico, la desigualdad cumple:

$\therefore\ x \in \langle 0;1\rangle$

***Rpta.:*** $\langle 0;1\rangle$

***Pregunta 36***

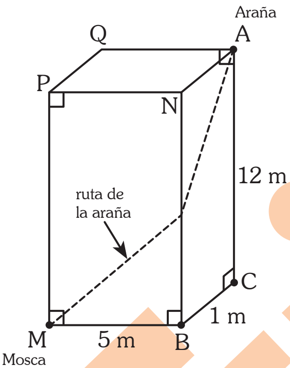
Una araña se encuentra ubicada en el vértice superior de una caja, de dimensiones 12 m, 5 m y 1 m . En el otro extremo de la diagonal de la caja está una mosca. La araña se dirige a la mosca recorriendo una distancia mínima sobre la superficie de la caja. Calcule el menor ángulo que forma la ruta de la araña sobre la tapa con una arista de la caja.

A) arc tan (1/2)
B) arc tan (3/4)
C) arc tan (4/5)
D) arc tan (5/6)
E) arc tan (6/7)

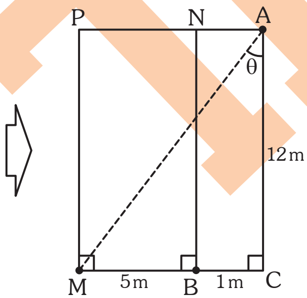
***Resolución 36***

**Razones trigonométricas de ángulo agudo**

***Razones trigonométricas de ángulo agudo***




El recorrido mínimo es una línea recta y se da en las siguientes posiciones de la mosca y la araña.




- El menor ángulo que forma la ruta de la araña con una arista de la caja es θ.

$$\mathrm{Tan}\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

***Rpta.: arc tan(1/2)***

***Pregunta 37***

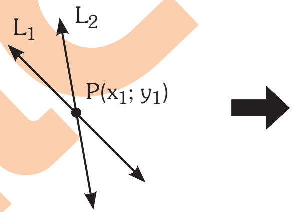
Determine la medida de un ángulo en posición normal cuyo lado final pasa por el punto de intersección de las rectas $L_1$: $3y + 2x - 6 = 0$ y $L_2$: $3x + 2y + 6 = 0$.

A) 45°
B) 60°
C) 120°
D) 135°
E) 225°

***Resolución 37***

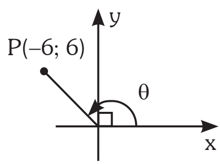
**R.T.C.M**

***Intersección de las rectas***




Resolviendo:

$$\left.\begin{array}{l} L_1\!: 3y_1 + 2x_1 - 6 = 0 \\ L_2\!: 3x_1 + 2y_1 + 6 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_1 = -6 \\ y_1 = 6 \end{array}$$



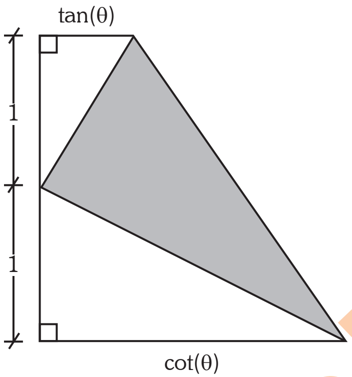

$\theta = 135° + 360°n,\ n \in \mathbb{Z}$

$\therefore \theta = 135°$

***Rpta.: 135°***

## Pregunta 38

En la figura mostrada, ¿para qué valor de θ el área sombreada es mínima?




A) $\frac{\pi}{12}$

B) $\frac{\pi}{8}$

C) $\frac{\pi}{6}$

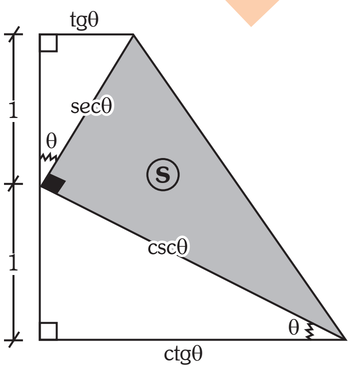
D) $\frac{\pi}{4}$

E) $\frac{\pi}{3}$

## Resolución 38

**Razones trigonométricas de ángulo agudo**

*Identidades trigonométricas*




$$S=\frac{1}{2}\sec\theta\cdot\csc\theta$$

$$S=\frac{1}{2}\underbrace{(\text{tg}\theta+\text{ctg}\theta)}_{\geq 2}$$

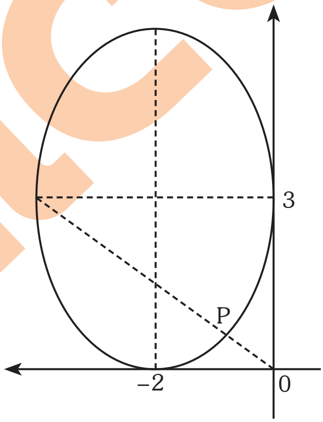
$$S_{\text{mín}}\Rightarrow \text{tg}\theta=1$$

$$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{4}$$

**Rpta.:** $\frac{\pi}{4}$

## Pregunta 39

Halle las coordenadas del punto P que pertenece a la elipse de la figura:




A) $\left(-\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$

B) $\left(-\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$

C) $\left(-\frac{3}{4};\frac{4}{5}\right)$

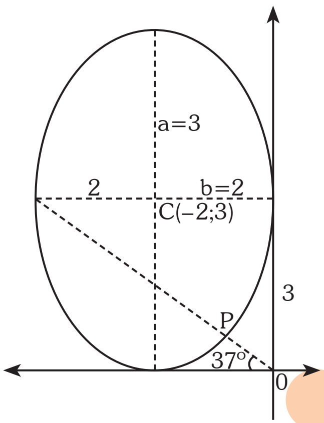
D) $\left(-\frac{4}{5};\frac{3}{4}\right)$

E) $\left(-\frac{3}{4};\frac{3}{5}\right)$

### *Resolución 39*

**Secciones cónicas**

*Elipse*




Sea P(–4k;3k)

$$\xi: \frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$$

Reemplazando:

$$\frac{(-4k+2)^2}{4}+\frac{(3k-3)^2}{9}=1$$

$5k^2-6k+1=0$

$(k-1)(5k-1)=0$

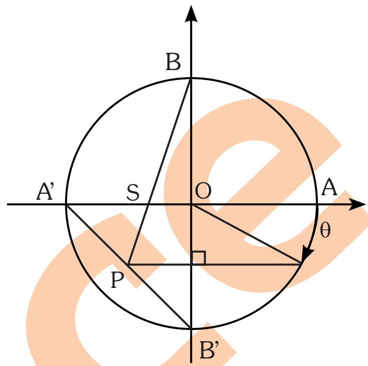
$k=1 \rightarrow P(-4;3)$

$$k=\frac{1}{5}\rightarrow P\left(-\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$$

***Rpta.:*** $\left(-\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$

### *Pregunta 40*

En la circunferencia trigonométrica de la figura mostrada, el ángulo θ está en posición normal. Determine el área de la región triangular SOB.




A) $\dfrac{1+\text{sen}\theta}{1-\text{sen}\theta}$

B) $\dfrac{1-\text{sen}\theta}{1+\text{sen}\theta}$

C) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-\text{sen}\theta}{1+\text{sen}\theta}\right)$

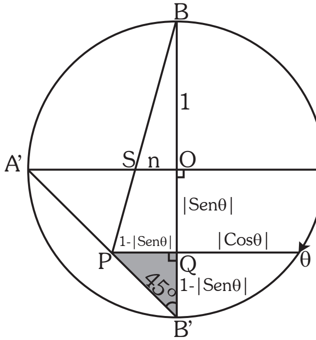
D) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1+\text{sen}\theta}{1-\text{sen}\theta}\right)$

E) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1+\cos\theta}{1-\text{sen}\theta}\right)$

***Resolución 40***

**Circunferencia trigonométrica**

***Situaciones geométricas***




- $\triangle$ OSB~$\triangle$PQB:

$$\frac{n}{1}=\frac{1-|\text{Sen}\theta|}{1+|\text{Sen}\theta|};\ \theta\in\text{IVC}$$

$$n=\frac{1+\text{Sen}\theta}{1-\text{Sen}\theta}$$

$$S_{SOB}=\frac{1}{2}\left(\frac{1+\text{Sen}\theta}{1-\text{Sen}\theta}\right)$$

***Rpta.:*** $\frac{1}{2}\left(\frac{1+\text{sen}\theta}{1-\text{sen}\theta}\right)$