MATEMÁTICA

Pregunta 01

Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. El producto de un número irracional por otro irracional es siempre irracional.

II. La suma de dos números irracionales siempre es un número irracional.

III. Entre dos números racionales diferentes siempre existe otro número racional.

A) VVV
B) VFV
C) VFF
D) FFF
E) FFV

Resolución 01

Números racionales (Q)

Principios teóricos y básicos

I. Si a∈Q' ∧ b∈Q', entonces axb ∈ Q'. La proposión es falsa, ya que si a= $\sqrt{2}$ ∧ b $\sqrt{8}$, entonces $\sqrt{2}$ x $\sqrt{8}=4\in Q$.

Además, los irracionales no son un conjunto cerrado con respecto a la multiplicación.

II. Si a∈Q' ∧ b∈Q', entonces (a+b)∈Q'. Proposición falsa, ya que el conjunto de los irracionales no es cerrado con respecto a la adición, por ejemplo:

$\sqrt{3}\in Q' \wedge (3-\sqrt{3})\in Q'$ entonces

$\sqrt{3}+(3-\sqrt{3})=3\in Q$

III. La proposición es verdadera, ya que, entre 2 números racionales $Q_1 \langle Q_2$, siempre es posible ubicar el racional:

$$\frac{Q_1+Q_2}{2}$$

$$Q_1 \langle \frac{Q_1+Q_2}{2} \langle Q_2$$

Rpta.: FFV

Pregunta 02

Calcule $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}+2,2$

Dé como respuesta la primera cifra decimal.

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

Resolución 02

Números racionales

Haciendo

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)^3=20+14\sqrt{2}$$
$$\left(a-b\sqrt{2}\right)^3=20-14\sqrt{2}$$

Se obtiene que a=2 ∧ b=1.

Reemplazamos:

$$\sqrt[\cancel{3}]{\left(2+\sqrt{2}\right)^{\cancel{3}}}+\sqrt[\cancel{3}]{\left(2-\sqrt{2}\right)^{\cancel{3}}}+2,2$$
$$2+\cancel{\sqrt{2}}+2-\cancel{\sqrt{2}}+2,2$$
$$6,2$$

∴ La primera cifra decimal es 2.

Rpta.: 2

Pregunta 03

Halle un número de la forma $\overline{ab1ba}$ tal que sea $\overset{\circ}{44}$. Dé como respuesta el residuo que se obtiene al dividir dicho número entre 5.

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

Resolución 03

Divisibilidad en $\mathbb{Z}$

Criterios de divisibilidad

Se tiene que $\overline{ab1ba} = \overset{\circ}{44}$.

1. $\overline{a\,b\,1\,b\,a} = \overset{\circ}{11}$

$+ - + - +$

$$2\overbrace{(a-b)}^{5} + 1 = \overset{\circ}{11}$$

$$\begin{matrix} a & b \\ \downarrow & \downarrow \\ 6 & 1 \\ 8 & 3 \end{matrix}$$

2. $\overline{b\,a} = \overset{\circ}{4}$ (a: par)

$\downarrow\downarrow$
1 6 (sí cumple)
3 8 (no cumple)

Luego, $\overline{ab1ba} = 61116 = \overset{\circ}{5} + 1$

El residuo es 1.

Rpta.: 1

Pregunta 04

Se tienen 496 números naturales consecutivos. Al dividir el número anterior al mayor entre el número menor de la lista de números, se obtiene como residuo 49 y como cociente un número natural diferente a 6.

Indique la cifra de las centenas del número que se obtiene al multiplicar el trigésimo segundo número y el centésimo tercer número.

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

Resolución 04

Cuatro operaciones

División

1.º	2.º	3.º		495.º	496.º
a ,	a+1 ,	a+2 ,	....	(a+494)	(a+495)

Si: $\begin{array}{r|l} a+494 & a \\ \cline{2-2} 49 & Q \end{array}$ $(Q \neq 6)$

$a+494 = aQ+49$

$445 = a\times(Q-1)$

$5\times 89 = a\times(Q-1)$

$a = 89 \ \wedge \ Q=6$ (No cumple)

$445\times 1 = a\times(Q-1)$

$\therefore a = 445 \ \wedge \ Q = 2$

$a_{32} = 445+31 = 476$

$a_{103} = 445+102 = 547$

$$a_{32}\times a_{103} = 476\times 547 = 260\,\underset{\uparrow}{3}\,72$$

Rpta.: 3

Pregunta 05

El número de hijos por familia en una determinada ciudad es una variable aleatoria H, cuya función de probabilidad es:

$$f(x) = P[H = x] = \frac{Kx}{5}$$

$$x = 1; 2; 3; 4; 5$$

¿Cuál es la probabilidad de que una familia tenga 3 hijos dado que tiene al menos dos hijos?

A) 0,200
B) 0,333
C) 0,214
D) 0,267
E) 0,357

Resolución 05

Probabilidades

Distribución de probabilidad

Sea la variable aleatoria H donde

$$f_{(x)} = P[H=x] = \frac{kx}{5}$$

es función de probabilidad.

$$\sum_{x=1}^{5} P[H=x] = 1$$

$$\frac{kx}{5}(1+2+3+4+5)=1 \rightarrow K=\frac{1}{3}$$

Piden

$$P[H=3 / H \geq 2] = \frac{\frac{1}{3}\times 3}{\frac{1}{3}\times 2+\frac{1}{3}\times 3+\frac{1}{3}\times 4+\frac{1}{3}\times 5}$$

$$P[H=3 / H \geq 2] = \frac{3}{14} = 0,214$$

Rpta.: 0,214

Pregunta 06

Cualquier tipo de café crudo pierde el 20 % de su peso al tostarlo. Se ha comprado dos tipos de café crudo cuyos precios por kilogramo son 10 y 15 soles respectivamente.

Si todo el café tostado se vendiera a 15 soles el kilogramo, no se ganaría ni se perdería, pero se vendió todo el café tostado en S/3240, por lo que se ganó el 20 % del costo. Halle la suma de los pesos iniciales y dé como respuesta la diferencia de la mayor cifra con la menor cifra del resultado.

A) 6
B) 5
C) 4
D) 3
E) 2

Resolución 06

Tanto por ciento

Aplicaciones comerciales

Sea la suma de los pesos iniciales P.

$$\Rightarrow \underbrace{80\,\%}_{\text{Merma del }20\,\%} \times \underbrace{15}_{\text{Precio venta (kg)}} \times \underbrace{120\,\%}_{\text{Ganancia del }20\,\%} P = 3240$$

$$P = 225$$

$$\text{Piden} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Mayor cifra}}}{5} - \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Menor cifra}}}{2} = 3$$

Rpta.: 3

Pregunta 07

Las magnitudes X e Y son tales que $(Y-2)$ y (X^2+1) son inversamente proporcionales. Se sabe que cuando $X=2$, se tiene que $Y=3$.

Determine la ecuación que relaciona X e Y.

A) $Y = \dfrac{3}{X^2-1}+2$

B) $Y = -\dfrac{5}{X^2+1}+4$

C) $Y = \dfrac{20}{X^2+1}-1$

D) $Y = \dfrac{11+X^2}{X^2+1}$

E) $Y = \dfrac{7+2X^2}{X^2+1}$

Resolución 07

Magnitudes proporcionales

Proporcionalidad inversa

Se sabe que:

(Y–2) I.P. $(X^2+1) \longleftrightarrow (Y-2)(X^2+1)=K$;

K=constante

Cuando X=2, Y=3, se tiene que:

$$(Y-2)(X^2+1)=(3-2)(2^2+1)$$
$$(Y-2)(X^2+1)=5$$
$$Y-2=\frac{5}{x^2+1}$$
$$\therefore\ Y=\frac{7+2X^2}{X^2+1}$$

Rpta.: $Y=\dfrac{7+2X^2}{X^2+1}$

Pregunta 08

El perímetro de un triángulo es 50 m y sobre cada lado del triángulo se forma un cuadrado cuyo lado coincida con el lado del triángulo.

Como resultado, la suma de las áreas de los cuadrados formados es $900\,m^2$ y el lado del primer cuadrado es al del segundo como el lado del tercero es a la mitad del primero.

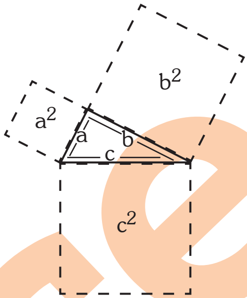
La relación del mayor y el menor de los lados del triángulo es de: (Considere que los lados del triángulo son números naturales)

A) 2 a 1
B) 5 a 2
C) 3 a 1
D) 5 a 1
E) 11 a 2

Resolución 08

Proporción

Proporción geométrica



Dato: * $a+b+c=50$

* $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{\frac{1}{2}a}$

$\therefore a^2=2bc$

* $\underbrace{a^2}_{2bc}+b^2+c^2=900$

$(b+c)^2=900$

$b+c=30$

$\therefore a=20 \wedge bc=200$

$b=20 \wedge c=10$

Rpta: $\dfrac{a}{c}=\dfrac{20}{10}=\dfrac{2}{1}$

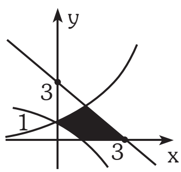
Rpta.: 2 a 1

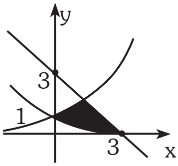
Pregunta 09

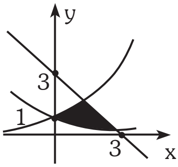
Grafique la región

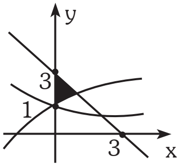
$$R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/y\le 2^x, y\ge\left(\frac{1}{2}\right)^x, x+y\le 3\right\}$$

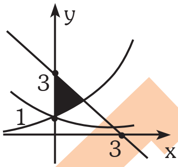
A)



B) 

C) 

D) 

E) 

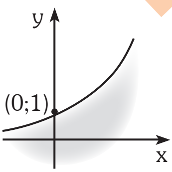
Resolución 09

Relaciones

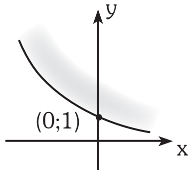
Gráfica de relaciones

Graficando cada relación

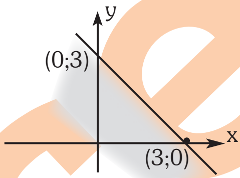
a) $y \leq 2^{x}$



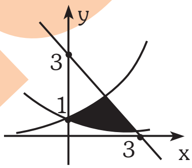
b) $y \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

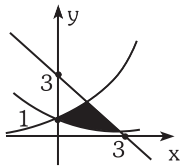


c) $x+y \leq 3$



Intersecandos las regiones:



Rpta.: 

Pregunta 10

Dado el conjunto

$S=\{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 < \operatorname{Log}|x-1| < 1\}$

Determine $S \cap([0;2] \cup [12;20])$

A) $\varnothing$

B) $\langle 1;2 \rangle$

C) $[15;20]$

D) $[12;15]$

E) $[12;20]$

Resolución 10

Logaritmos

Inecuación logarítmica

$0 < \log |x-1| < 1$

Tomando antilogaritmo

$1 < |x-1| < 10$

$$\underbrace{|x-1|>1}_{(\alpha)} \wedge \underbrace{|x-1|<10}_{(\beta)}$$

- De (α)

  $x-1>1 \vee x-1<-1$

  $x>2 \vee x<0$

  $x \in \langle -\infty;0\rangle \vee \langle 2;+\infty\rangle ...\ CS_1$

- De (β)

  $-10<x-1<10$

  $-9<x<11$

  $x \in \langle -9;11\rangle ...\ CS_2$

Por lo tanto, $CS= CS_1 \wedge CS_2$

$CS=\langle -9;0\rangle \vee \langle 2;11\rangle$

$\therefore\ S=\langle -9;0\rangle \vee \langle 2;11\rangle$

Piden

$S \wedge ([0;2] \vee [12;20])=\varnothing$

Rpta.: $\varnothing$

Pregunta 11

Se tiene una sucesión geométrica $(a_n)_{n\in N}$ con razón r. Siendo $a_4 = 4$ y $a_7 = 12$.

Calcule r^3+a_{10}

A) 39
B) 40
C) 42
D) 45
E) 48

Resolución 11

Progresiones

P. A. – P. G.

Término enésimo:

$a_n = a_1 r^{n-1}$

Datos:

- $a_4 = 4$

  $a_1 r^3 = 4\ ...\ (\alpha)$

- $a_7 = 12$

  $a_1 r^6 = 12\ ...\ (\beta)$

De (α) y (β):

$r^3 = 3\ ...(\theta)$

Reemplazamos (θ) en (α):

$a_1 = \frac{4}{3}$

Hallamos a_{10}:

$$a_{10} = a_1 r^9 = \frac{4}{3}(r^3)^3 = \frac{4}{3}(3)^3$$

$a_{10} = 36$

Por lo tanto: $a_{10}+r^3 = 39$

Rpta.: 39

Pregunta 12

Dadas las siguientes proposiciones:

I. Si la sucesión $\{(-1)^n a_n\}$ es monótona, entonces dicha sucesión es constante.

II. Si la sucesión $\{|a_n|\}$ es convergente, entonces $\{a_n\}$ es también convergente.

III. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Son correctas:

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) I y II
E) I y III

Resolución 12

Sucesiones y series

Convergencia - divergencia

IV. FALSO

Sea $a_n = (-1)^n . \frac{1}{n}$, ahora:

$b_n = (-1)^n . a_n = \frac{1}{n}$

Nótese que $\{b_n\}$ no es constante.

V. FALSO

Sea $b_n = |a_n| = \frac{n}{2n+1}$

Nótese que $\text{Lim}(b_n) = \frac{1}{2}$

pero $a_n = \frac{(-1)^n . n}{2n+1}$, ahora:

$$a_n = \begin{cases} \frac{n}{2n+1}; \text{ n par} \\ -\frac{n}{2n+1}; \text{ n impar} \end{cases}$$

Nótese que $\text{Lim}(a_n)$ tiene puntos límites diferentes; por tanto, $\{a_n\}$ no es convergente.

VI. VERDADERO

En efecto:

Si: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = S \in R \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n)$ también converge

Rpta.: Solo III

Pregunta 13

Dado el problema:

$$\underset{(x,y)\in D}{\text{mín}} \{ax + by\}$$

con $(x_o, y_o) \in$ D solución única, establecer cuál de las siguientes proposiciones son correctas.

I. Siempre existe una recta L tal que $L \cap D = \{(x_o, y_o)\}$.

II. El punto (x_o, y_o) pertenece al interior del conjunto D.

III. $\forall (x, y) \in D$, $ax_o + by_o \geq ax + by$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) I y II
E) I, II y III

Resolución 13

Programación lineal

Optimización

I. Verdadero

En efecto, la recta L es familia de la recta generada por la función objetivo.

II. Falso

En efecto, la solución óptima se ubica en un punto vértice.

III. Falso

Lo que se cumple es que:

$\forall (x,y) \in D$, $ax_o + by_o \leq ax + by$

Rpta.: Solo I

Pregunta 14

Sean A, B, X e Y matrices de orden 2x2 tales

que: $AX + BY = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ y $2AX - BY = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$;

si $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, entonces la suma de los elementos de la matriz X es:

A) –0,4
B) –0,5
C) –0,6
D) –0,7
E) –0,8

Resolución 14

Matrices

Operaciones con matrices

Se tiene:

$$AX+BY=\begin{bmatrix}1&2\\3&1\end{bmatrix}$$

$$2AX-BY=\begin{bmatrix}2&4\\0&2\end{bmatrix}$$

Sumando las ecuaciones:

$$3AX=\begin{bmatrix}3&6\\3&3\end{bmatrix}$$

$$AX=\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}\ldots\alpha$$

Del dato:

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\4&3\end{bmatrix}\rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}-3&-\frac{1}{2}\\-2&1\end{bmatrix}$$

Reemplazando A^{-1} en α:

$$X=\begin{bmatrix}-3&-\frac{1}{2}\\-2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}1&\frac{5}{2}\\-1&-3\end{bmatrix}$$

$$\therefore \sum \text{elementos de } X=-0,5$$

Rpta.: –0,5

Pregunta 15

Dada la matriz $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\6&4&0\\6&5&9\end{bmatrix}$. Considere una matriz S de orden 3x3 triangular inferior de términos positivos, tal que:

$$S^2=A,\ \text{diag}(S)=(1,2,3)$$

Calcule: $K=\dfrac{\text{Traza}(S\,S^T)+16}{|A|}$

A) 1/2
B) 1
C) 3/2
D) 2
E) 5/2

Resolución 15

Matrices

Matrices cuadradas

Sea la matriz dada

$$S^2=S.S=\begin{pmatrix}1&0&0\\a&2&0\\b&c&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\a&2&0\\b&c&3\end{pmatrix}$$

$$S^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\3a&4&0\\4b+ac&5c&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\6&4&0\\6&5&9\end{pmatrix}$$

de donde

$a=2\wedge b=1\wedge c=1$

con lo cual conseguimos

$$S=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\1&1&3\end{pmatrix}\rightarrow S^T=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}$$

al multiplicar las matrices

$$S.S^T=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&8&4\\1&4&11\end{pmatrix}$$

finalmente

$$k=\frac{20+16}{1.4.9}=\frac{36}{36}$$
$k=1$

Rpta.: 1

Pregunta 16

Sea f: $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ una función definida por:

$$f(x)=2^x-\frac{1}{2^x}$$

Entonces podemos decir que la función inversa f* de f está dada por (en caso exista):

A) $\frac{1}{2}\text{Ln}\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$

B) $\frac{1}{2}\text{Ln}\left(\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$

C) No existe f*

D) $\log_2\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$

E) $\log_2\left(\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$

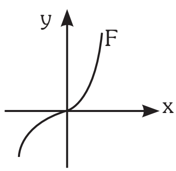
Resolución 16

Funciones

Función inversa

De la función $f(x)=2^x-\frac{1}{2^x}$

nótese que tiene como gráfica



F es inyectiva.

Para hallar F*

$$y=2^x-\frac{1}{2^x}$$

$$2^{2.x}-y.2^x-1=0$$

$$2^x=\frac{y\pm\sqrt{y^2+4}}{2}$$

como $2^x>0\rightarrow 2^x=\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}$

tomando logaritmo en base 2.

$$x=\log_2\left(\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}\right)$$

$$F^*(x)=\log_2\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$$

Rpta.: $\log_2\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$

Pregunta 17

Halle el polinomio p(x) de coeficientes racionales de menor grado con raíces 1 y $1+\sqrt{2}$, y que además cumpla p(0)=1.

Dé como respuesta la suma de los coeficientes del polinomio.

A) –2
B) –1
C) 0
D) 1
E) 3

Resolución 17

Expresiones algebraicas

Polinomios

Del dato, x=1 es una raíz de P(x); entonces,

$P(x)=(x-1).Q(x)$

piden la suma de coeficientes.

$$\Sigma\text{coef}_{(P(x))}=P(1)=0$$

Rpta.: 0

Pregunta 18

Sea f: $\left\langle\frac{1}{2};+\infty\right\rangle \to \mathbb{R}$ una función definida por:

$$f(x)=\frac{2x-1}{2x^2-x+\frac{1}{2}}$$

Entonces el rango de f es el conjunto:

A) $\left[\frac{2}{3};\infty\right\rangle$

B) $\left\langle 0;\frac{3}{2}\right]$

C) $\left\langle\frac{3}{2};+\infty\right\rangle$

D) $\left\langle 0;\frac{2}{3}\right]$

E) $\left\langle -\infty;\frac{2}{3}\right]$

Resolución 18

Funciones

Rango de una función

Se tiene:

$$f_{(x)}=\frac{2(2x-1)}{4x^2-2x+1};x>\frac{1}{2}$$

$$f_{(x)}=\frac{2}{2x+\frac{1}{2x-1}}$$

$$f_{(x)}=\frac{2}{2x-1+\frac{1}{2x-1}+1}$$

Como: $x>\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow 2x-1+\frac{1}{2x-1}\geq 2$$

$$2x+\frac{1}{2x-1}\geq 3$$

$$0<\frac{2}{2x+\frac{1}{2x-1}}\leq\frac{2}{3}$$

$$\text{Ran}_{(f)}=\left\langle 0;\frac{2}{3}\right]$$

Rpta.: $\left\langle 0;\frac{2}{3}\right]$

Pregunta 19

Definimos el conjunto:

$$A=\{x\in\mathbb{R}/\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x-2}=1\}$$

Considere las siguientes proposiciones:

I. La suma de los elementos del conjunto A es 7

II. Card (A) = 2

III. $2\sqrt{2}-2\in A$

Determine, de las proposiciones dadas, cuáles son verdaderas.

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo III

D) I y II

E) I y III

Resolución 19

Ecuaciones

Ecuaciones de grado superior

Sea $\sqrt[3]{x-2}=k$; luego, $x=k^3+2$.

$\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x-2}=1$

$\sqrt{k^3+3}-k=1\to\sqrt{k^3+3}=k+1\ldots(*)$

$k^3+3=k^2+2k+1\leftrightarrow k^3-k^2-2k+2=0$

$(k+\sqrt{2})(k-\sqrt{2})(k-1)=0$

$k=-\sqrt{2}\vee k=\sqrt{2}\vee k=1$

Según existencia en $\mathbb{R}$ de $(*)$ solo aceptamos

$k=\sqrt{2}\vee k=1$

ahora, tenemos

$x=2\sqrt{2}+2\vee x=3$

finalmente, en cada proposición:

I. Falso

en efecto, Σ de elementos$=5+2\sqrt{2}$.

II. Verdadero

en efecto, card(A)=2.

III. Falso

en efecto, $2\sqrt{2}-2\notin A$.

Rpta.: Solo II

Pregunta 20

Sean A, B y D subconjuntos de los números reales y definimos el operador * mediante:

$A * B = (A \cap B)^C$

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $(A*B)*D = A(B*D)$

II. $(A*B)*A = A*(B*A)$

III. $A * \varnothing = \varnothing$

Donde A^C indica el complemento de A.

A) V F F

B) F V V

C) V V V

D) F F F

E) F V F

Resolución 20

Teoría de de conjuntos

Leyes y propiedades

I) $\underbrace{(A * B) * D}_{[(A \cap B)^C \cap D]^C} = \underbrace{A * (B * D)}_{[A \cap (B \cap D)^C]^C}$ ....(F)

$(A \cap B) \cup D^C \neq A^C \cup (B \cap D)$

II) $\underbrace{(A * B)}_{} * A = A * (B * A)$..........................(V)

$\underbrace{(B * A) * A}_{}$

$A * (B * A)$

III) $A * \phi = \phi$ ....(F)

$(A \cap \phi)^C$

ϕ^C

$\cup$

Rpta.: FVF

Pregunta 21

El volumen de un cono de revolución es 36π cm^3. Se inscribe un triángulo equilátero ABC en la base del cono. El triángulo ABC está circunscrito a una circunferencia cuyo círculo es base de un cilindro recto inscrito en el cono. Calcule el volumen del cilindro (en cm^3).

A) $\dfrac{27\pi}{10}$

B) $\dfrac{27\pi}{8}$

C) $\dfrac{27\pi}{5}$

D) $\dfrac{27\pi}{2}$

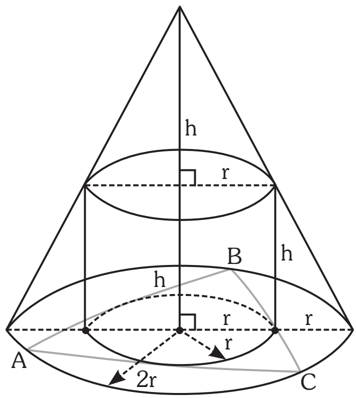
E) 27π

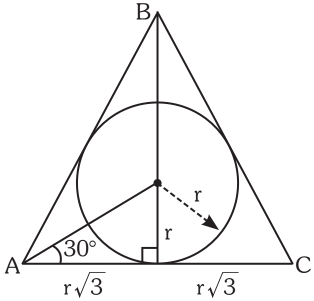
Resolución 21

Sólidos de revolución

Cilindro y cono

Piden volumen del cilindro:





Volumen del cono=36π

$$\frac{1}{3}\pi(2r)^2.2h = 36\pi$$

$$r^2h = \frac{27}{2}$$

Volumen del cilindro $= \pi r^2 h$

Volumen del cilindro $= \dfrac{27}{2}\pi$

Rpta.: $\dfrac{27\pi}{2}$

Pregunta 22

En un tronco de pirámide $ABC-A_1B_1C_1$, los volúmenes de las pirámides B_1-ABC y $A-A_1B_1C_1$, miden V_1 y V_2 respectivamente. Determine el volumen de la pirámide $A-CB_1C_1$.

A) $\sqrt{V_1V_2}$

B) $\dfrac{V_1V_2}{V_1+V_2}$

C) $\dfrac{2V_1V_2}{V_1+V_2}$

D) $2\sqrt{V_1V_2}$

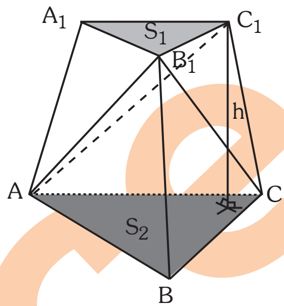
E) $3\sqrt{V_1V_2}$

Resolución 22

Pirámide

Tronco de pirámide

Piden volumen de $A - CB_1C_1$



Datos:

- Vol. $B_1 - ABC = V_1$
- Vol. $A - A_1B_1C_1 = V_2$
- $\frac{1}{3}.S_2h = V_1 \longrightarrow S_2 = \dfrac{3V_1}{h}$
- $\frac{1}{3}.S_1h = V_2 \longrightarrow S_1 = \dfrac{3V_2}{h}$

$$\text{Vol. } A_1B_1C_1 - ABC = \frac{h}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2})$$

$$\text{Vol. } A_1B_1C_1 - ABC = \frac{h}{3}\left(\frac{3V_2}{h} + \frac{3V_1}{h} + \sqrt{\frac{3V_2}{h}.\frac{3V_1}{h}}\right)$$

$$\text{Vol. } A_1B_1C_1 - ABC = \frac{h}{3}\left(\frac{3V_2 + 3V_1 + 3\sqrt{V_1V_2}}{h}\right)$$

$$\text{Vol. } A_1B_1C_1 - ABC = V_2 + V_1 + \sqrt{V_1V_2}$$

Vol. B_1–ABC+Vol.A–$A_1B_1C_1$+Vol.A–CB_1C_1=
$V_2 + V_1 + \sqrt{V_1V_2}$

$$\cancel{V_1} + \cancel{V_2} + \text{Vol.}A - CB_1C_1 = \cancel{V_2} + \cancel{V_1} + \sqrt{V_1V_2}$$

$$\text{Vol. } A - CB_1C_1 = \sqrt{V_1V_2}$$

Rpta.: $\sqrt{V_1V_2}$

Pregunta 23

Sea el tetraedro regular de arista **a**, con **a** un entero positivo diferente de múltiplo de 3. Se unen los baricentros de las caras del tetraedro regular formando un tetraedro nuevo y así se repite el proceso n veces. Si $\frac{S_n}{V_n}=\frac{243\sqrt{6}}{4}$, donde S_n y V_n son el área total y el volumen del tetraedro respectivamente en el proceso n-ésimo. Halle $81\sqrt{6}\,h_n$, siendo h_n la altura del tetraedro en el proceso n-ésimo.

A) $8\sqrt{3}$

B) 16

C) $8\sqrt{6}$

D) $16\sqrt{2}$

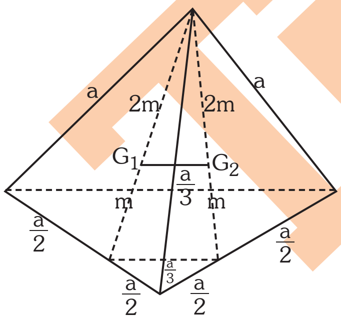
E) 32

Resolución 23

Poliedros regulares

Tetraedro regular

Piden: $81\sqrt{6}\,hn$



Proceso:

$$a \xrightarrow{1.^o} \frac{a}{3} \xrightarrow{2.^o} \frac{a}{3^2} \xrightarrow{3.^o} \frac{a}{3^3} \xrightarrow{4.^o} \frac{a}{3^4} \cdots \xrightarrow{n} \frac{a}{3^n}$$

$\rightarrow$ La arista final es: $\frac{a}{3^n}$

* Dato:

$$\frac{S_n}{V_n}=\frac{243\sqrt{6}}{4} \rightarrow \frac{\frac{a^2}{3^{2n}}\sqrt{3}}{\frac{a^3}{3^{3n}}\frac{\sqrt{2}}{12}}=\frac{243\sqrt{6}}{4}$$

$$\rightarrow \frac{3^n}{a}=\frac{81}{8} \rightarrow \frac{a}{3^n}=\frac{8}{81}$$

$$81\sqrt{6}\,h_n=81\sqrt{6}\times\frac{a}{3^n}\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$81\sqrt{6}\,h_n=81\times2\times\frac{8}{81}$$

$$\therefore\ 81\sqrt{6}\,h_n=16$$

Rpta.: 16

Pregunta 24

Las caras de un triedro equilátero de vértice V miden 60°. En una de sus aristas se considera un punto R de tal manera que VR = 2 cm. Por R pasa un plano perpendicular a $\overline{VR}$, que interseca a las otras aristas en S y T. Halle el área del triángulo RST (en cm^2).

A) $3\sqrt{2}$

B) $2\sqrt{6}$

C) $\sqrt{26}$

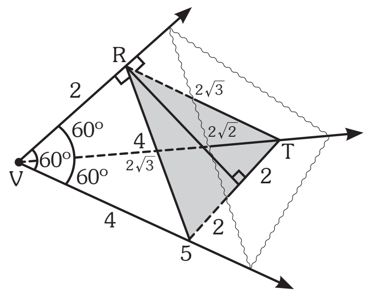
D) $3\sqrt{3}$

E) $4\sqrt{2}$

Resolución 24

Ángulo triedro

Triedro equilátero



Piden $A_{\blacktriangle RST}$.
$\Delta VRS \wedge \Delta VRT$
(Not 30° y 60°)
$VT=4 \wedge VS=4$

ΔVTS: equilátero
$ST=4$

$$A_{\blacktriangle RST}=\frac{4.2\sqrt{2}}{2}$$
$$\therefore A_{\blacktriangle RST}=4\sqrt{2}$$

Rpta.: $4\sqrt{2}$

Pregunta 25

El punto A está a 8 m encima de un plano horizontal P, y el punto B se halla a 4 m encima del mismo plano. Si C es un punto del plano P tal que AC + BC es mínimo y el ángulo que forman la recta $\overleftrightarrow{CB}$ con el plano P es 53°, entonces (en m) AC es:

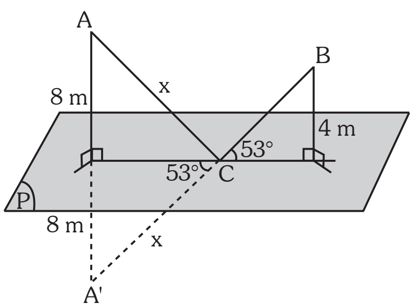
A) 8
B) 8,5
C) 9
D) 9,5
E) 10

Resolución 25

Geometría del espacio

Posiciones entre recta y plano

Piden AC=x.



Por ◺ notable de 37° y 53°
x=10 m

Rpta.: 10

Pregunta 26

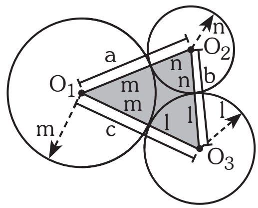
Para tres circunferencias tangentes (exteriormente) dos a dos, la suma de sus radios es 10 cm y el producto de los mismos es 40 cm^3. Halle el área (en cm^2) de la región triangular cuyos vértices son los centros de la circunferencia.

A) 18
B) 18,5
C) 19
D) 19,5
E) 20

Resolución 26

Áreas de regiones planas

Áreas de regiones triangulares



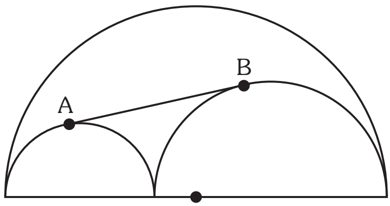
Piden $A_\blacktriangle$.
Dato: $m+n+l=10$
$mnl=40$

$$A_\blacktriangle=\sqrt{P(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$P=\frac{a+b+c}{2}$$
$$P=\frac{m+n+n+l+m+l}{2}$$
$$P=m+n+l$$
$$A_\blacktriangle=\sqrt{(m+n+l)mnl}$$
$$A_\blacktriangle=\sqrt{10.40}$$
$$A_\blacktriangle=20$$

Rpta.: 20

Pregunta 27

La figura muestra tres semicircunferencias y la longitud de la circunferencia mayor es 10π u. Si AB=$\sqrt{24}$ u, siendo $\overline{AB}$ tangente a las semicircunferencias interiores, calcule la longitud (en u) de la circunferencia menor.

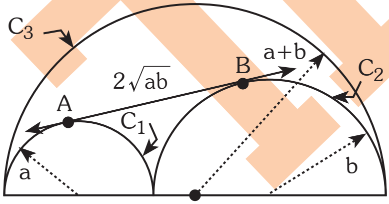


A) 2π
B) 3π
C) 4π
D) 5π
E) 6π

Resolución 27

Relaciones métricas en el triángulo rectángulo

Piden: $\ell_{C_1} = 2\pi a$



* $2\sqrt{ab} = \sqrt{24}$

$\rightarrow ab = 6$ ..... (1)

* $10\cancel{\pi} = 2\cancel{\pi}(a+b)$

$a+b = 5$

$b = 5-a$ ..... (2)

(2) en (1)

$a(5-a) = 6$

$a^2-5a+6 = 0$

$\rightarrow a = 2$

$b = 3$

$\ell_{C_1} = 2\pi(a)$

$\ell_{C_1} = 4\pi$

Rpta.: 4π

Pregunta 28

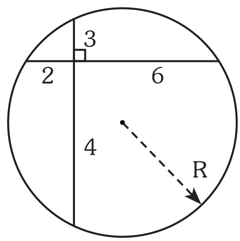
Al cortarse dos cuerdas de una misma circunferencia perpendicularmente, una de ellas queda dividida en segmentos de 3 y 4 unidades y la otra en segmentos de 6 y 2 unidades. Determine el diámetro de la circunferencia.

A) $\sqrt{87}$
B) $\sqrt{73}$
C) $\sqrt{68}$
D) $\sqrt{65}$
E) $\sqrt{63}$

Resolución 28

Relaciónes métricas

Relaciones métricas en la circunferencia



Piden 2R.

*Teorema de Faure

$3^2+4^2+6^2+2^2=4R^2$

$\frac{65}{4} = R^2$

$\rightarrow R = \frac{\sqrt{65}}{2}$

$\therefore 2R=\sqrt{65}$

Rpta.: $\sqrt{65}$

Pregunta 29

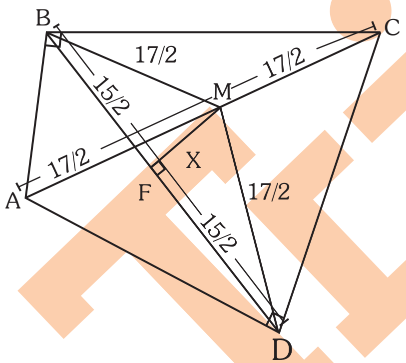
En un cuadrilátero ABCD, las diagonales miden AC = 17 cm y BD 15 cm; sea "M" punto medio de $\overline{AC}$ y "F" punto medio de $\overline{BD}$; los ángulos interiores de B y D miden 90°. Calcule MF en cm.

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

Resolución 29

Aplicaciones de la congruencia

Teorema de la mediana



Piden: X

* T. mediana relativa a la hipotenusa

$BM = 17/2 \wedge MD = 15/2$

* $\triangle$BMD: Isósceles

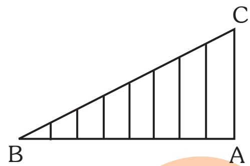
$\overline{MF}$: mediana, altura

$\therefore X = 4$

Rpta.: 4

Pregunta 30

El cateto $\overline{AB}$ del triángulo rectángulo ABC se divide en 8 partes congruentes. Por los puntos de división se trazan 7 segmentos paralelos al cateto $\overline{AC}$ tal como se muestra en la figura. Si AC = 10 m, halle la suma (en m) de las longitudes de los 7 segmentos.



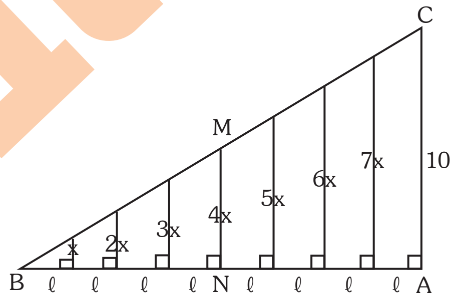
A) 33
B) 34
C) 35
D) 36
E) 37

Resolución 30

Semejanza de triángulos

Piden Sx.

Sx=x+2x+3x+4x+5x+6x+7x



- Los triángulos rectángulos son semejantes.
  $\overline{MN}$: base media
  4x=5
- Sx=x+2x+3x+4x+5x+6x+7x
  Sx=x(1+2+3+...+7)
  Sx=28x
  Sx=7(4x)
  Sx=7(5)
  $\therefore$ Sx=35

Rpta.: 35

Pregunta 31

En un triángulo ABC,

m∡BAC=2(m∡ACB)=30°, si se traza la mediana BM, calcule m∡ABM.

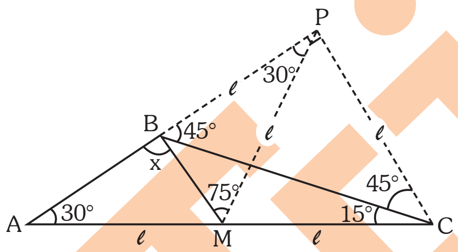
A) 75°
B) 80°
C) 90°
D) 100°
E) 105°

Resolución 31

Congruencia de triángulos

Teorema de la mediana relativa a la hipotenusa

Piden "x".



$\overline{PM}$: teorema de la mediana relativa a la hipotenusa

$\left.\begin{matrix}\Delta APM \\ \Delta BPM\end{matrix}\right\}$ isósceles

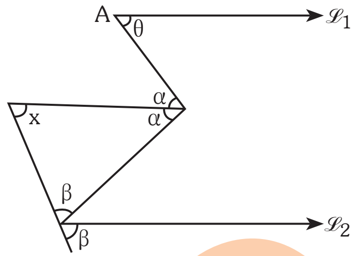
$x = 30° + 75°$

$\therefore\ x = 105°$

Rpta.: 105°

Pregunta 32

Sabiendo que $\mathscr{L}_1 // \mathscr{L}_2$ y θ es la medida de un ángulo agudo. Calcule el mínimo valor entero de "x".



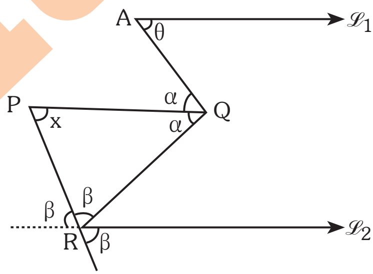
A) 41°
B) 42°
C) 44°
D) 45°
E) 46°

Resolución 32

Ángulos entre paralelas

Teoremas

Piden "x".



△PQR

$x+\alpha+\beta=180°$

$\alpha+\beta=180°-x$

$\mathscr{L}_1 // \mathscr{L}_2$

$\theta+x=\alpha+\beta$

$\theta=180°-x-x$

$\theta=180°-2x$

Dato: $\theta<90°$

$0° < 180° – 2x < 90°$

$2x < 180° \wedge 90° < 2x$

$\rightarrow 45° < x < 90°$

$\therefore x_{mín} = 46°$

Rpta.: 46°

Pregunta 33

La ecuación de una cónica en coordenadas polares es:

$$r = \frac{15}{4 - 4\cos(\theta)}$$

Determine una ecuación cuadrática para sus puntos en coordenadas rectangulares.

A) $x^2 = \frac{15}{2}y + \left(\frac{15}{4}\right)^2$

B) $y^2 = \frac{15}{2}x + \left(\frac{15}{4}\right)^2$

C) $x^2 = -\frac{15}{2}y + \left(\frac{15}{4}\right)^2$

D) $y^2 = -\frac{15}{2}x + \left(\frac{15}{4}\right)^2$

E) $x^2 = -\frac{15}{4}y + \left(\frac{15}{2}\right)^2$

Resolución 33

Coordenadas polares

Cónicas

$$r = \frac{15}{4 - 4\cos\theta}$$

$4r - 4r\cos\theta = 15 \rightarrow 4r = \overbrace{4r\cos\theta}^{4x} + 15$, elevando al cuadrado:

$16(x^2 + y^2) = 16x^2 + 120x + 15^2$

$16y^2 = 120x + 15^2$

$$y^2 = \frac{15}{2}x + \left(\frac{15}{4}\right)^2$$

Rpta.: $y^2 = \frac{15}{2}x + \left(\frac{15}{4}\right)^2$

Pregunta 34

El menor ángulo de un paralelogramo mide α y sus diagonales miden 2m y 2n. Calcule su área (m>n).

A) $(m^2 – n^2)\tan(\alpha)$

B) $(m^2 – n^2)\cot(\alpha)$

C) $(m^2 – n^2)\sec(\alpha)$

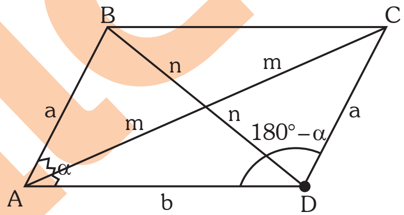
D) $(m^2 – n^2)\csc(\alpha)$

E) $(m^2 – n^2)\text{sen}(\alpha)$

Resolución 34

Resolución de triángulos oblicuángulos

Teorema de cosenos



Área: $S_{ABCD} = ab\,\text{sen}\alpha$... (1)

Teorema de cosenos

$\triangle ADC$: $(2m)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \alpha)$

$4m^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$

$\triangle BAD$: $4n^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$

Restando:

$$\frac{m^2 - n^2}{\cos\alpha} = ab \ldots (2)$$

Reemplazando (2) en (1).

$S_{ABCD} = (m^2 - n^2)\tan(\alpha)$

Rpta.: $(m^2 - n^2)\tan(\alpha)$

Pregunta 35

Un marino que observa el horizonte desde un faro de altura h, lo hace con un ángulo de depresión θ. Calcule el radio R de la Tierra en función de h y θ.

A) $\dfrac{h\,\mathrm{sen}(\theta)}{1-\mathrm{sen}(\theta)}$

B) $\dfrac{h\cos(\theta)}{1-\cos(\theta)}$

C) $\dfrac{1+\cos(\theta)}{h\cos(\theta)}$

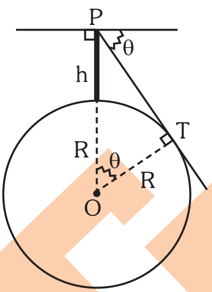
D) $\dfrac{1+\mathrm{sen}(\theta)}{h\,\mathrm{sen}(\theta)}$

E) $\dfrac{h\cos(\theta)}{1-\mathrm{sen}(\theta)}$

Resolución 35

Ángulos verticales

Graficando:



$$\cos\theta=\frac{R}{R+h}$$

$$R\cos\theta+h\cos\theta=R$$

$$\frac{h\cos(\theta)}{1-\cos(\theta)}=R$$

Rpta.: $\dfrac{h\cos(\theta)}{1-\cos(\theta)}=R$

Pregunta 36

Determine el menor periodo positivo de la función definida por:

$$f(x)=\sqrt{1+\cos(2x)}+\sqrt{1-\cos(2x)}$$

A) $\dfrac{\pi}{2}$

B) π

C) $\dfrac{3\pi}{2}$

D) 2π

E) 4π

Resolución 36

Funciones trigonométricas

Teoría de periodos

$$f(x)=\sqrt{1+\cos 2x}+\sqrt{1-\cos 2x}$$

$$f(x)=\sqrt{2\cos^2 x}+\sqrt{2\mathrm{sen}^2 x}$$

$$f(x)=\sqrt{2}\,|\cos x|+\sqrt{2}\,|\mathrm{sen}x|$$

$$=\sqrt{2}\,|\cos x|+\sqrt{2}\,|\mathrm{sen}x|$$

Ahora

$$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|+\sqrt{2}\left|\mathrm{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|$$

$$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}\,|\mathrm{sen}x|+\sqrt{2}\,|\cos x|$$

$$\rightarrow f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=f(x)$$

$$\therefore T=\frac{\pi}{2}$$

Rpta.: $\dfrac{\pi}{2}$

Pregunta 37

Obtenga el conjunto solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = 1 - \cos(x) \\ 1 = 4y\cos(x) \end{cases}$$

A) $\left\{\left(2k\pi \pm \frac{\pi}{3}; \frac{1}{2}\right) / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

B) $\left\{\left(2k\pi \pm \frac{\pi}{3}; 1\right) / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

C) $\left\{\left(k\pi \pm \frac{\pi}{3}; \frac{1}{2}\right) / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

D) $\left\{\left(k\pi \pm \frac{\pi}{3}; 1\right) / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

E) $\left\{\left(k\pi \pm \frac{\pi}{6}; \frac{1}{3}\right) / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Resolución 37

Ecuaciones trigonométricas

$y = 1 - \cos x$... (1)

$1 = 4y\cos x$... (2)

(1) en (2).

$1 = 4(1 - \cos x)\cos x$

$4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$

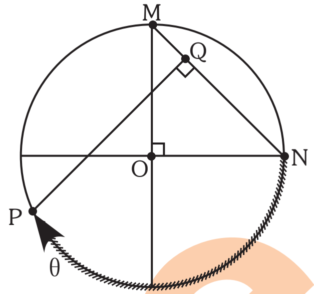
$(2\cos x - 1)^2 = 0$

$\cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}; \ y = \frac{1}{2}$

Rpta.: $\left\{\left(2k\pi \pm \frac{\pi}{3}; \frac{1}{2}\right) / k \in \mathbb{Z}\right\}$

Pregunta 38

En el círculo trigonométrico de la figura, θ es un ángulo negativo en posición normal. Si $\overline{PQ}$ es perpendicular a $\overline{MN}$, halle las coordenadas de $Q(x_0, y_0)$ y dé como respuesta $x_0 - y_0$.



A) $2\cos(\theta) - \text{sen}(\theta)$

B) $\cos(\theta) - \text{sen}(\theta)$

C) $2\text{sen}(\theta) - \cos(\theta)$

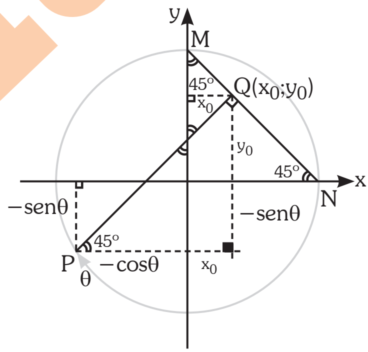
D) $\text{sen}(\theta) + \cos(\theta)$

E) $\text{sen}(\theta) - \cos(\theta)$

Resolución 38

Circunferencia trigonométrica

Línea seno-coseno



Del gráfico:

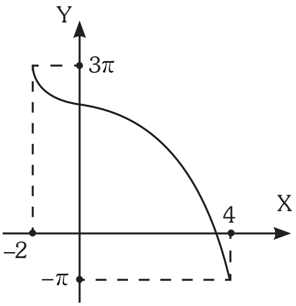
$x_0 - \cos\theta = y_0 - \text{sen}\theta$

$x_0 - y_0 = \cos\theta - \text{sen}\theta$

Rpta.: $\cos(\theta) - \text{sen}(\theta)$

Pregunta 39

Si la gráfica de $y=A\ \text{arc}\cos(Bx+C)+D$ es:



Determine el valor de: $E=A+B+C$.

A) 3

B) $\frac{2}{3}$

C) $\frac{4}{3}$

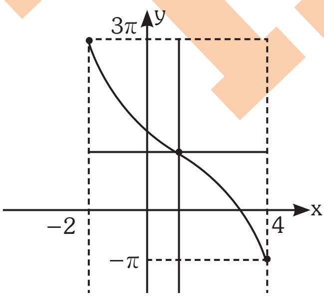
D) 4

E) $\frac{14}{3}$

Resolución 39

Funciones trigonométricas inversas

Gráficos



$y=A\arccos(Bx+C)+D$

i) $-1\leq Bx+C\leq 1 \rightarrow \underbrace{\frac{-1-C}{B}}_{-2}\leq x\leq \underbrace{\frac{1-C}{B}}_{4}$

$$\left.\begin{array}{r} 1-C=4B \\ -1-C=-2B \end{array}\right\} B=1/3;\ C=-1/3$$

ii) $0\leq \arccos(Bx+C)\leq \pi \rightarrow \underbrace{D}_{-\pi}\leq A\arccos(Bx+C)\leq \underbrace{A\pi+D}_{3\pi}$

$D=-\pi$

$A\pi+D=3\pi \rightarrow A=4$

$\Rightarrow E=A+B+C \rightarrow E=4+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\ \therefore E=4$

Rpta.: 4

Pregunta 40

Sea α un ángulo en el II cuadrante con $\tan(\alpha)=-\frac{7}{24}$ y β un ángulo en el III cuadrante con $\cot(\beta)=\frac{3}{4}$. Determine el valor de $\text{sen}(\alpha+\beta)$.

A) $-\frac{107}{125}$

B) $-\frac{3}{5}$

C) $\frac{17}{125}$

D) $\frac{3}{5}$

E) $\frac{107}{125}$

Resolución 40

Reducción al primer cuadrante

Del dato:

I. $\text{tg}\alpha=-\frac{7}{24};\ \alpha\in IIC$

$\rightarrow \alpha=180^\circ-16^\circ$

II. $\text{ctg}\beta=\frac{3}{4};\ \beta\in IIIC$

$\rightarrow \beta=180^\circ+53^\circ$

Piden:

$\text{sen}(\alpha+\beta)=\text{sen}(360^\circ+37^\circ)=\text{sen}37^\circ=3/5$

Rpta.: 3/5