

Pregunta 01

La relación entre el descuento racional y el descuento comercial es $\frac{9}{10}$.

Determine la relación entre el valor actual comercial y el valor nominal del mismo documento.

- A) $\frac{6}{9}$
- B) $\frac{7}{9}$
- C) $\frac{8}{9}$
- D) $\frac{9}{9}$
- E) $\frac{10}{9}$

Resolución 01

Regla de descuento

Descuentos comercial y racional

Dato:

$$\frac{D_R}{D_c} = \frac{9}{10}$$

Piden:

$$\frac{V_{ac}}{V_n} = 1 - r\% \times T \dots (I)$$

Propiedad:

$$\frac{D_c}{D_R} = 1 + r\% \times T$$

$$\frac{10}{9} = 1 + r\% \times T$$

$$\frac{1}{9} = r\% \times T \dots (II)$$

Reemplazando (II) en (I):

$$\frac{V_{ac}}{V_n} = 1 - \frac{1}{9}$$

$$\therefore \frac{V_{ac}}{V_n} = \frac{8}{9}$$

Rpta.: $\frac{8}{9}$

Pregunta 02

Determine la última cifra periódica que se obtiene al hallar la expresión decimal equivalente a la fracción

$$f = \frac{2019}{7^{2019}}$$

- A) 1
- B) 3
- C) 5
- D) 7
- E) 9

Resolución 02

Números racionales

Números decimales

“f” genera un número decimal periódico puro, menor que uno.

Se tiene que:

$$7^4 = 2401 = \overset{\circ}{10} + 1$$

Luego:

$$7^{2019} = (7^4)^{504} \times 7^3$$

$$= \underbrace{(\overset{\circ}{10} + 1)^{504}} \times \underbrace{343}$$

$$= \underbrace{(\overset{\circ}{10} + 1) \times (\overset{\circ}{10} + 3)}$$

$$= \overset{\circ}{10} + 3$$

$$= \dots 3$$

$$\frac{2019}{7^{2019}} = 0,\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$$

$$\frac{2019}{7^{2019}} = \frac{\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}}{999 \dots 9}$$

$$\underbrace{(2019)} \times \underbrace{(99 \dots 99)} = \underbrace{(7^{2019})} \times \underbrace{(\overline{a_1 a_2 \dots a_n})}$$

$$\dots 1 = (\dots 3) \times (\overline{a_1 a_2 \dots a_n})$$

↓
7
Última cifra del periodo

Rpta.: 7

Pregunta 03

Se tiene 12 fichas numeradas del 1 al 12. Se extrae aleatoriamente una primera ficha, luego una segunda y una tercera ficha, sin reposición. Calcule la probabilidad de que estos tres números estén en progresión aritmética de razón 1 o de razón -1.

- A) $\frac{1}{66}$
- B) $\frac{5}{66}$
- C) $\frac{7}{66}$
- D) $\frac{11}{66}$
- E) $\frac{35}{66}$

Resolución 03

Probabilidades

Cálculo de probabilidades

Fichas: 1, 2, 3... 12

ε : Extraer aleatoriamente 3 fichas sin reposición.

$n(\Omega) = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$

A: Extraer aleatoriamente 3 fichas sin reposición y que formen una progresión aritmética de razón 1 o -1

Hallando $n(A)$:

<u>P. A. razón +1</u>	<u>P. A. razón -1</u>
1; 2; 3	3; 2; 1
2; 3; 4	4; 3; 2
⋮	⋮
<u>10; 11; 12</u>	<u>12; 11; 10</u>
10 casos	10 casos

$\rightarrow n(A) = 10 + 10 = 20$

$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{20}{1320} = \frac{1}{66}$

Rpta.: 1/66

Pregunta 04

Indique la alternativa correcta después de determinar si cada proposición es verdadera (V) o falsa (F).

- I. Dado $a, b \in \mathbb{Z}$, $a > b$, entonces $\forall c \in \mathbb{N}$, $ac < bc$
 - II. Dado $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \leq b$, entonces $\forall c \in \mathbb{Z}$, $a - c \leq b - c$
 - III. $\forall x \in \mathbb{N}$, $x^2 \geq 0$
- A) FVV
 - B) FFF
 - C) FFV
 - D) FVF
 - E) VVV

Resolución 04

Desigualdades

Axiomas de los números reales

- I. FALSO
 $a > b; \forall c \in \mathbb{N}$
 $\rightarrow ac > bc$
- II. VERDADERO
 $a \leq b, \forall c \in \mathbb{Z}$
 $a + (-c) \leq b + (-c)$
 $\rightarrow a - c \leq b - c$
- III. VERDADERO
 $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 \geq 0$

Rpta.: FVV

Pregunta 05

Halle el número de elementos del conjunto

$$H = \{m \in \mathbb{N} / \text{MCD}(m, 900) = 1, m < 900\}$$

\mathbb{N} conjunto de los números naturales.

- A) 120
- B) 150
- C) 180
- D) 210
- E) 240

Resolución 05

Números primos

Indicador de un número

$$H = \{m \in \mathbb{N} / \text{MCD}(m; 900) = 1; m < 900\}$$

Los elementos de H son los valores de “m” que son PESI con 900 y menores que 900.

Calculamos el indicador de: $900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

$$\varnothing_{900} = 900 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right)$$

$$\varnothing_{900} = 900 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = 240$$

$$\therefore n(H) = 240$$

Rpta.: 240

Pregunta 06

¿Cuántos números de tres cifras son divisibles entre cuatro y la suma de sus cifras al ser dividido entre 9 da 4 de residuo?

- A) 25
- B) 26
- C) 27
- D) 28
- E) 29

Resolución 06

Divisibilidad

Criterios de divisibilidad

Si $\overline{abc} = \overset{\circ}{4}$, tal que $a+b+c = \overset{\circ}{9} + 4$.

$$\overline{abc} = \begin{cases} \overset{\circ}{4} + 4 \\ \overset{\circ}{9} + 4 \end{cases} \rightarrow \overline{abc} = \overset{\circ}{36} + 4, \overline{abc} = 36k + 4$$

$$100 \leq 36k + 4 < 1000$$

$$2,66 \leq k < 27,66$$

$$K = \underline{3, 4, 5, \dots, 27}$$

25 valores

Existen 25 números.

Rpta.: 25

Pregunta 07

En la fabricación de helados, los insumos relevantes son la leche, el azúcar y los saborizantes. El precio de estos helados está en relación directamente proporcional con los precios de la leche y del azúcar, e inversamente proporcional a la demanda de los saborizantes. ¿Qué variación experimentará el precio de un helado de vainilla cuando el precio de la leche disminuya en $\frac{1}{3}$, el precio del azúcar aumente en $\frac{2}{5}$ y la demanda de la esencia de vainilla aumente en $\frac{2}{3}$?

- A) aumenta en 44 %
- B) disminuye en 44 %
- C) no cambia
- D) disminuye en 12 %
- E) aumenta en 12 %

Resolución 07

Magnitudes proporcionales

Proporcionalidad compuesta

Sean:

P_H : Precio del helado

P_L : Precio de la leche

P_A : Precio del azúcar

D_S : Demanda del saborizante

Del enunciado tenemos:

$$\frac{P_H \times D_S}{P_L \times P_A} = K$$

Luego:

P_H	100 %	X
P_L	3a	2a
P_A	5b	7b
D_S	3c	5c

Reemplazando tenemos:

$$\frac{100\% \times (3c)}{(3a)(5b)} = \frac{X(5c)}{(2a)(7b)}$$

Resolviendo:

$$x = 56\%$$

Rpta.: Disminuye en 44 %

Pregunta 08

Se está construyendo un tramo de una carretera, para lo cual se necesitan 1 800 m³ de arena gruesa, 14 400 m³ de tierra dura, 10 800 m³ de piedra chancada, 9 000 m³ de roca blanda y 3 600 m³ de roca dura. Si los precios del metro cúbico de cada uno de estos terrenos está dado por 15,40; 25,30; 35,20; 44 y 126,5 soles, respectivamente. Determine el precio medio (en soles) del metro cúbico de terreno.

- A) 37
- B) 39
- C) 40
- D) 41
- E) 42

Resolución 08

Regla de mezcla

Precio medio

Volumen

Precio (m³)

A: 1800 m ³	→ 1 m ³	S/ 15,4
T: 14400 m ³	→ 8 m ³	S/ 25,3
P: 10800 m ³	→ 6 m ³	S/ 35,2
RB: 9000 m ³	→ 5 m ³	S/ 44,0
RD: 3600 m ³	→ 2 m ³	S/ 126,5
Total=	22 m ³	

Prohibida su venta

$$P_m = \frac{1(16,4) + 8(25,3) + 6(35,2) + 5(44) + 2(126,5)}{22}$$

$$P_m = \frac{902}{22} = S/ 41 \text{ el m}^3 \text{ de la mezcla}$$

Rpta.: 41

Pregunta 09

La ecuación $\frac{x^2 + 3x}{5x + 12} = \frac{m - 1}{m + 1}$ en x, tiene raíces de signos el mismo valor absoluto. Dadas las siguientes proposiciones

- I. $m < 3$
- II. $m \in [2, 6]$
- III. $m \in [5, 10]$

Indique cuál (o cuáles) son las correctas:

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo III
- D) I y II
- E) II y III

Resolución 09

Ecuaciones

Ec. Cuadrática

Operando

$$(m + 1)x^2 + 3(m + 1)x = 5(m - 1)x + 12(m - 1)$$

$$(m + 1)x^2 + (8 - 2m)x + 12(1 - m) = 0$$

Como las raíces son opuestas:

$$x_1 + x_2 = 0 \quad (x_1, x_2 \text{ raíces})$$

$$\text{Entonces: } 8 - 2m = 0$$

$$\therefore m = 4$$

La proposición II es la única correcta.

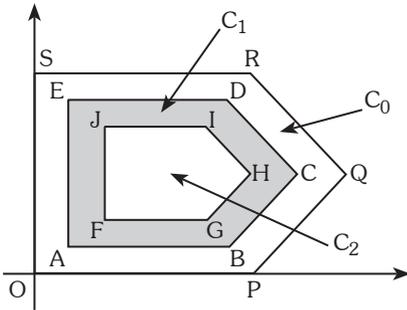
Rpta.: Solo II

Pregunta 10

En el problema:

Minimizar $f(x, y) = ax + by$. Sujeto a: $(x, y) \in C_0$. Donde C_0 es la región admisible.

Se tiene que el punto $R \in C_0$ es la solución óptima. Si se consideran los conjuntos C_1 y C_2 de lados paralelos a C_0 tal que $C_2 \subset C_1 \subset C_0$ (ver figura), indique la proposición correcta.



- A) $f(R) > f(D) > f(I)$
- B) $f(R) < f(D) < f(I)$
- C) $f(R) = f(D) = f(I)$
- D) $f(R) = f(D) < f(I)$
- E) $f(R) = 2f(D) = 4f(I)$

Resolución 10

Programación lineal

Valor óptimo

Se tiene: función objetivo

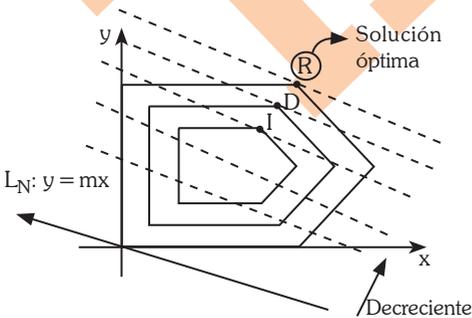
$$f(x,y) = ax + by$$

Aplicando la familia de las rectas de nivel

$$L_N: y = mx$$

Pendiente: $m = -a/b$

Del gráfico:



Por lo tanto: $f(R) < f(D) < f(I)$

Rpta.: $f(R) < f(D) < f(I)$

Pregunta 11

Dado el sistema:

$$\begin{aligned} -x + y &\leq 2 \\ -x + 7y &\geq 20 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

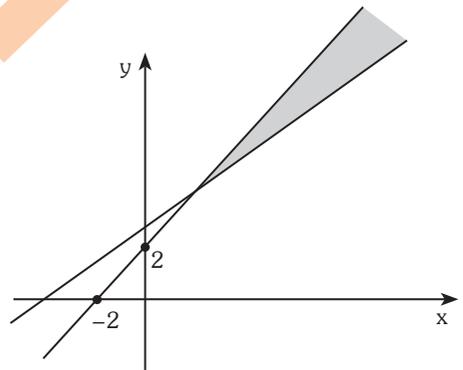
Indique cuáles de las siguientes proposiciones son correctas:

- I. La solución es única.
 - II. La solución es un conjunto no acotado.
 - III. La solución es un conjunto vacío.
- A) I, II y III
 - B) I y II
 - C) Solo II
 - D) I y III
 - E) Solo III

Resolución 11

Programación lineal

Región factible



Del gráfico:

- I. Falso. Tiene infinitas soluciones.
- II. Verdadero.
- III. Falso. Tiene infinitas soluciones.

Rpta.: Solo II

Prohibida su venta

Pregunta 12

Dado el problema:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(\bar{x}) \\ &\bar{x} \in P \end{aligned}$$

donde P es una pirámide A - BCDE.

Si mínimo $f(\bar{x}) = f(A)$, siendo f una función lineal de la forma $f(\bar{x}) = ax + by + cz$ y además se cumple que

$$f(A) = f(B) = f(C)$$

Indique cuál de las siguientes proposiciones es correcta:

- A) $\min_{\bar{x} \in P} f(\bar{x}) = \max_{\bar{x} \in P} f(\bar{x}) = f(A)$
- B) $\min_{\bar{x} \in P} f(\bar{x}) = f(A) < \max_{\bar{x} \in P} f(\bar{x})$
- C) $f(A) = f(B) = f(C) < f(\bar{x}), \bar{x} \in \{ABC\}$
- D) $f(A) < f(\bar{x}) \forall \bar{x} \in P$
- E) $f(A) = f(B) = f(C) > f(\bar{x}), \bar{x} \in \{A, B, C\}$

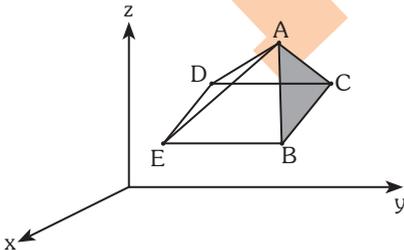
Resolución 12

Programación lineal

Valor óptimo

Del problema minimizar $f(\bar{x})$

$$\bar{x} \in P$$



Con $f(\bar{x}) = ax + by + cz$

Como:

Mínimo $f(\bar{x}) = f(A)$

Además: $f(A) = f(B) = f(C)$

Entonces el mínimo se encuentra en cualquier punto de la región triangular ABC

Por lo tanto lo correcto es:

mínimo $f(\bar{x}) = f(A) < \text{máximo } f(\bar{x})$

$$\bar{x} \in P \qquad \bar{x} \in P$$

$$\text{Rpta.: } \min_{\bar{x} \in P} f(\bar{x}) = f(A) < \max_{\bar{x} \in P} f(\bar{x})$$

Pregunta 13

Dada la ecuación cuadrática

$$x^2 - mx + m + 3 = 0$$

Determine m tal que tenga soluciones reales.

- A) $\langle -\infty, 3] \cup [7, +\infty)$
- B) $\langle -\infty, -4] \cup [8, +\infty)$
- C) $\langle -\infty, -2] \cup [6, +\infty)$
- D) \mathbb{R}
- E) $\langle -\infty, -5]$

Resolución 13

Ecuaciones

Ecuación cuadrática

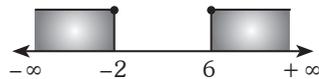
La ecuación tiene soluciones reales, por lo tanto se cumple:

$$\Delta \geq 0$$

$$(-m)^2 - 4(1)(m+3) \geq 0$$

$$m^2 - 4m - 12 \geq 0$$

$$(m-6)(m+2) \geq 0$$



$$\therefore m \in \langle -\infty; -2] \cup [6; +\infty)$$

$$\text{Rpta.: } \langle -\infty; -2] \cup [6; +\infty)$$

Pregunta 14

Sean p, q, r, t proposiciones lógicas tales que:

$$p \rightarrow r = V, p \rightarrow \sim q = F$$

Halle el valor de verdad de las siguientes proposiciones e indique cuántas son verdaderas.

- I. $\sim p \rightarrow t \equiv \sim (t \wedge \sim t)$
- II. $(p \wedge q) \wedge t \equiv (q \wedge r) \wedge t$
- III. $(p \vee t) \wedge q \equiv (p \wedge t) \vee q$
- IV. $\sim(\sim p \vee t) \wedge (p \rightarrow \sim t) \equiv \sim t$
- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) 3
- E) 4

Resolución 14

Lógica proposicional

Leyes lógicas

$p \rightarrow r \equiv V; p \rightarrow \sim q \equiv F$

$\underbrace{\sim}_{\sim} \underbrace{\sim}_{\sim} \underbrace{\sim}_{\sim} \underbrace{\sim}_{\sim}$

$\therefore p \equiv V; q \equiv V; r \equiv V$

Reemplazando en las proposiciones:

I. $\underbrace{\sim}_{\sim} p \rightarrow \underbrace{\sim}_{\sim} t \equiv \underbrace{\sim}_{\sim} (t \wedge \sim t) \equiv V \dots (V)$

II. $(\underbrace{\sim}_{\sim} p \wedge \underbrace{\sim}_{\sim} q) \wedge t \equiv (\underbrace{\sim}_{\sim} q \wedge \underbrace{\sim}_{\sim} r) \wedge t \dots (V)$

III. $(\underbrace{\sim}_{\sim} p \vee t) \wedge q \equiv (\underbrace{\sim}_{\sim} p \wedge t) \vee q \dots (V)$

IV. $\sim(\underbrace{\sim}_{\sim} p \vee t) \wedge (p \rightarrow \underbrace{\sim}_{\sim} t) \equiv \sim t \dots (V)$

\therefore Las 4 son verdaderas.

Rpta.: 4

Pregunta 15

Indique la alternativa correcta después de determinar si cada proposición es verdadera (V) o falsa (F) según el orden dado.

- I. La ecuación $\log_2(3x+1) = 4$ tiene solución en $\langle -\frac{1}{3}, \infty \rangle$.
- II. Sean $f(x) = x^2$, $g(x) = \ln(\frac{1}{x})$ en $\langle 0, \infty \rangle$, entonces las gráficas de f y g se interceptan en un único punto.
- III. Las funciones $f(x) = \log_2(x+1)$ y $g(x) = \log_3(x+2)$ tienen un único punto en común.
- A) VVV
- B) VVF
- C) VFV
- D) FVF
- E) FFF

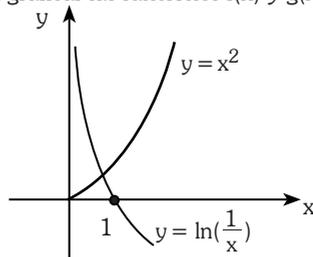
Resolución 15

Logaritmos

Función logarítmica

I. $3x+1 > 0 \wedge 3x+1 = 2^4$
 $x > -\frac{1}{3} \quad x = 5$
 $\therefore CS = \{5\}$ (Verdadera)

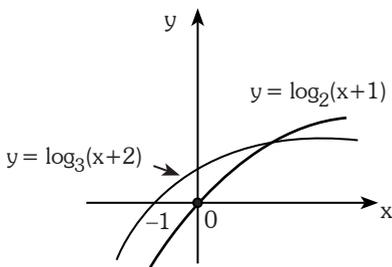
II. Al graficar las funciones $f(x)$ y $g(x)$.



Del gráfico notamos que las funciones se interceptan en un único punto (Verdadera)

III. Al graficar las funciones $f(g)$ y $g(x)$

Prohibida su venta



Del gráfico notamos que las funciones se interceptan en un único punto (Verdadera)

Rpta.: VVV

Pregunta 16

Dadas las siguientes proposiciones con respecto a la suma finita

$$\sum_{k=0}^{1720} \left(-\frac{1}{x}\right)^k$$

- I. La suma es igual a cero para $x = 1$.
- II. La suma es igual a uno para $x = 1$.
- III. La suma es 1721 para $x = -1$.

Son correctas:

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo III
- D) I y II
- E) II y III

Resolución 16

Sucesiones y series

Series numéricas

De la serie finita:

I. Falso

Para $x=1$:

$$\sum_{k=0}^{1720} (-1)^k = \underbrace{1-1+1-1+\dots+1-1+1}_{1721 \text{ sumandos}} = 1$$

II. Verdadero

De lo anterior, para $x=1$:

$$\sum_{k=0}^{1720} (-1)^k = 1$$

III. Verdadero

Para $x=-1$:

$$\sum_{k=0}^{1720} (1)^k = \underbrace{1+1+\dots+1}_{1721 \text{ sumandos}} = 1721$$

Rpta.: II y III

Pregunta 17

El teorema fundamental de la aritmética establece que, todo número natural mayor o igual a dos se puede expresar de forma única

$$P_1^{n_1} P_2^{n_2} \dots P_k^{n_k}$$

donde P_1, P_2, \dots, P_k son sus factores primos y n_1, n_2, \dots, n_k son enteros mayores o iguales a uno.

Se define la función

$$f: \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x = 1 \\ n_1 + \dots + n_k & , x = P_1^{n_1} \dots P_k^{n_k} \end{cases}$$

Indique cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas:

- I. f es sobreyectiva.
 - II. La ecuación $f(n) = 1$ tiene infinitas soluciones.
 - III. f es creciente.
- A) Solo I
 - B) Solo II
 - C) Solo III
 - D) I y II
 - E) I y III

Resolución 17

Funciones

Funciones especiales

$$f: \mathbb{N} = \{1; 2; 3; \dots; \dots\} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x = 1 \\ n_1 + n_2 + \dots + n_k & ; x = P_1^{n_1} \cdot P_2^{n_2} \dots P_k^{n_k} \end{cases}$$

Nótese que:

$$f(2) = 1; 2 = 2^1$$

$$f(3) = 1; 3 = 3^1$$

$$f(4) = 2; 4 = 2^2$$

$$f(5) = 1; 5 = 5^1$$

$$f(6) = 2; 6 = 3^1 \cdot 2^1$$

$$f(7) = 1; 7 = 7^1$$

$$f(8) = 3; 8 = 2^3$$

$$f(9) = 2; 9 = 3^2$$

$$f(10) = 2; 10 = 5^1 \cdot 2^1$$

$$f(11) = 1; 11 = 11^1$$

⋮
⋮

Con lo cual se concluye que:

“f” es sobreyectiva.

f(n) = 1 tiene infinitas soluciones.

“f” no es monótona.

Rpta.: I y II

Pregunta 18

Se define la matriz $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$ como

$$a_{ij} = \begin{cases} 2i + j & \text{si } i < j \\ ij & \text{si } i \geq j \end{cases}$$

Calcule $|AA^T|$.

- A) 82
- B) 84
- C) 86
- D) 89
- E) 92

Resolución 18

Matrices

Determinante

De la condición:

$$a_{ij} = \begin{cases} 2i + j & ; \text{si } i < j \\ ij & ; \text{si } i \geq j \end{cases}$$

La matriz será:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

multiplicando las matrices:

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 42 & 53 \\ 53 & 69 \end{bmatrix} \rightarrow |A \cdot A^T| = 89$$

Rpta.: 89

Pregunta 19

Sea la expresión matemática

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x};$$

$$x \notin \{-1, 0, 1\}$$

Calcule $m (m \in \mathbb{R}^+)$, si se cumple que

$f(\Delta) = 2$, cuando:

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{m^2}}$$

- A) 1
- B) 49
- C) 2
- D) 4
- E) $\sqrt{11}$

Resolución 19

Funciones

Función real de variable real

De la función:

$$F(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

Según el dato: $F(\Delta) = 2 \rightarrow \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 1$

Efectuando: $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \Delta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Como: $\Delta = \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{m^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Al resolver: $m = 2 \vee m = -2$

Como $m \in \mathbb{R}^+$, $m = 2$

Pregunta 20

Sea A una matriz cuadrada de orden 2.
Sea X una matriz 2×1 no nula. Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F):

- I. $X^T A^T A X \geq 0$
- II. Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A^T A X = \lambda X$ y $\lambda < 0$.
- III. Si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A^T A X = \lambda X$, entonces una de las columnas de $\lambda Y - A^T A$, es un múltiplo de la otra.

- A) FFF
- B) FVV
- C) VFF
- D) VFV
- E) VVV

Rpta.: 2

Resolución 20

Matrices

Ecuaación matricial

I. Verdadero

En efecto $X^T A^T A X = (AX)^T (AX) \geq 0$

Nota:

(vector fila) · (vector columna) = escalar

II. Falso

En efecto, consideremos:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \wedge X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

De la condición:

$$A^T A X = \lambda X; \lambda < 0$$

Tenemos:

$$\begin{cases} (a^2 + c^2 - \lambda)x + (ab + cd)y = 0 \\ (ab + cd)x + (b^2 + d^2 - \lambda)y = 0 \end{cases}$$

Aquí por condición:

$$\begin{vmatrix} a^2 + c^2 - \lambda & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Al resolver:

$$\lambda^2 - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\lambda + [(a^2 + c^2)(b^2 + d^2) - (ab + cd)^2] = 0$$

Aquí descubrimos por propiedad de raíces y el discriminante que λ es positivo.

III. Verdadero

Es una consecuencia inmediata de la proposición anterior.

Rpta.: VFF

Pregunta 21

En un trapezio ABCD cuyas bases son \overline{AD} y \overline{BC} , donde $AD = \frac{1}{3}BC$ y la altura $BD=3u$. Si $m\angle BAD=2m\angle BCD$.

Calcule el área del trapezio (en u^2)

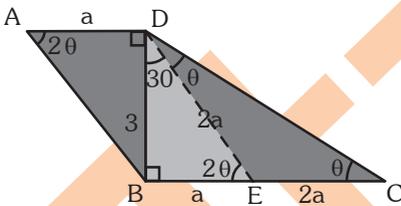
- A) $4\sqrt{3}$
- B) $6\sqrt{3}$
- C) $8\sqrt{3}$
- D) $10\sqrt{3}$
- E) $12\sqrt{3}$

Resolución 21

Áreas

Áreas de regiones cuadrangulares

Piden: $A_{\blacksquare ABCD}$



Se traza \overline{DE} paralelo a \overline{AB}

→ $\blacksquare ABED$: Paralelogramo

→ $\triangle BDE$: Notable

$$2\theta = 60^\circ$$

$$\rightarrow \theta = 30^\circ$$

$$\rightarrow a = \sqrt{3}$$

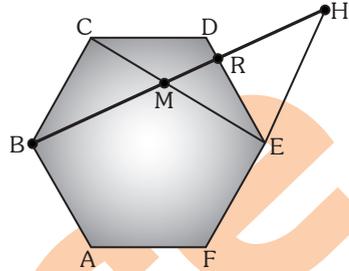
$$A_{\blacksquare} = \left(\frac{3\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} \right) \cdot 3$$

$$\therefore A_{\blacksquare} = 6\sqrt{3} u^2$$

Rpta.: $6\sqrt{3}$

Pregunta 22

En la figura ABCDEF es un hexágono regular, determine RH, sabiendo que $BM=a$ y $MR=b$, con $a > b$.

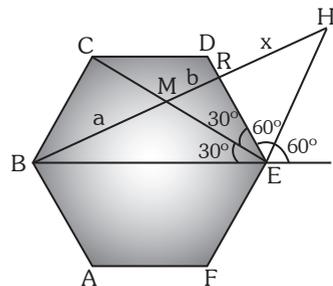


- A) $\frac{a(a+b)}{a-b}$
- B) $\frac{b(a+b)}{a-b}$
- C) $\frac{(a+b)^2}{a-b}$
- D) $\frac{ab}{a-b}$
- E) $\frac{b^2}{a-b}$

Resolución 22

Proporcionalidad

Cuaterna armónica



Prohibida su venta

Piden x

B, M, R y H forman la cuaterna armónica.

$$ax = b(a + b + x)$$

$$x = \frac{b(a+b)}{a-b}$$

Rpta.: $\frac{b(a+b)}{a-b}$

Pregunta 23

En un triángulo acutángulo ABC, se cumple que $m\angle ABC = 3m\angle ACB$.

Si la mediatriz de \overline{BC} interseca a la prolongación de la bisectriz interior \overline{BM} en el punto P, entonces el mayor valor entero de la medida (en grados sexagesimales) del ángulo PCA es

- A) 11
- B) 12
- C) 13
- D) 14
- E) 15

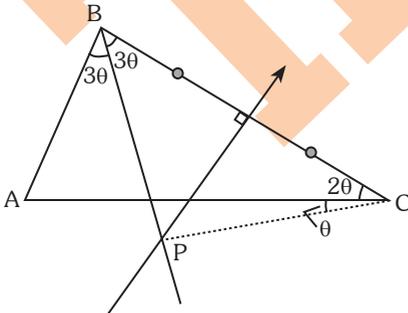
Resolución 23

Congruencia

Aplicaciones de la congruencia

Piden θ_{\max}

En el gráfico



$\triangle ABC$: acutángulo
 $0^\circ < 6\theta < 90^\circ$
 $0^\circ < \theta < 15^\circ$
 $\theta_{\max} = 14^\circ$

Rpta.: 14

Pregunta 24

Un vaso que tiene la forma de un cilindro circular recto cuyo diámetro mide 6 cm, contiene agua hasta cierta altura. Se inclina el vaso justo hasta que el agua llegue al borde, en ese instante del borde opuesto del agua se ha alejado del borde del vaso 4 cm. Determine el área (en cm^2) de la película que se ha formado por la inclinación.

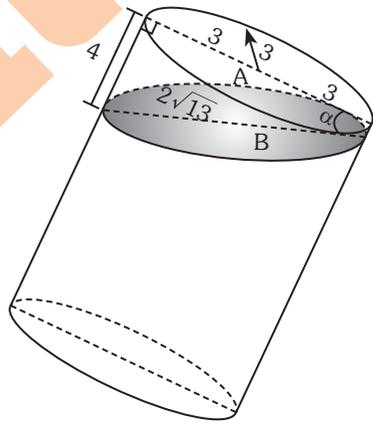
- A) $\pi\sqrt{13}$
- B) $2\pi\sqrt{13}$
- C) $3\pi\sqrt{13}$
- D) $4\pi\sqrt{13}$
- E) $5\pi\sqrt{13}$

Resolución 24

Geometría del espacio

Tronco de cilindro

En el gráfico



Piden B

A: área de la base del cilindro.

B: área de la película

$$A = \pi 3^2 = 9\pi$$

$$A = B \cdot \frac{\cos \alpha}{6}$$

Prohibida su venta

$$9\pi = B \cdot \frac{6}{2\sqrt{13}}$$

$$B = 3\pi\sqrt{13}$$

Rpta.: $3\pi\sqrt{13}$

Pregunta 25

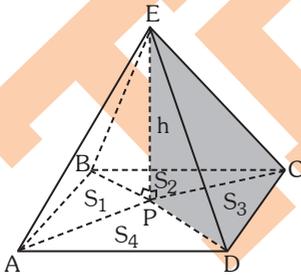
Se tiene un paralelogramo ABCD en cuyo interior se toma un punto P. Por P se levanta una perpendicular al plano del paralelogramo y en ella se toma un punto E. Halle el volumen en m^3 de la pirámide E-DPC, si los volúmenes de las pirámides E-DPA, E-CPB y E-BPA son $10m^3$, $12m^3$ y $14m^3$ respectivamente.

- A) 6
- B) 7
- C) 8
- D) 10
- E) 13

Resolución 25

Geometría del espacio

Pirámide



Piden Vol E-DPC

$$\text{Vol}_{E-DPC} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_3$$

$$\frac{1}{3} h \cdot S_4 = 10; \frac{1}{3} h S_2 = 12; \frac{1}{3} h S_1 = 14$$

Por teorema:

$$S_1 + S_3 = S_2 + S_4$$

$$\frac{h}{3} S_1 + \frac{h}{3} S_3 = \frac{h}{3} S_2 + \frac{h}{3} S_4$$

$$14 + \text{Vol}_{E-DPC} = 12 + 10$$

$$\text{Vol}_{E-DPC} = 8 m^3$$

Rpta.: 8

Pregunta 26

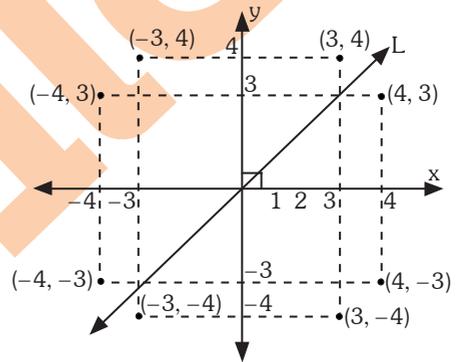
Dado el punto $P_1(3,4)$, determine el número de los puntos que se generan por simetría, si se toman como ejes de simetría, los ejes coordenados y la recta $y=x$.

- A) 2
- B) 4
- C) 6
- D) 8
- E) 10

Resolución 26

Simetría

Simetría axial



Piden el número de puntos de simetría respecto a los ejes coordenados y a la recta $L: y=x$.

Del gráfico, se observa que hay 8 puntos de simetría.

Rpta.: 8

Pregunta 27

Una torta de tres pisos de 30cm de alto está formada por tres prismas rectos de base rectangular de igual altura. Si los volúmenes de dichos prismas están en relación 1, 2 y 3. Calcule el área de la base de la torta (en cm^2), si el volumen total es de $12 \times 10^4 cm^3$.

Prohibida su venta

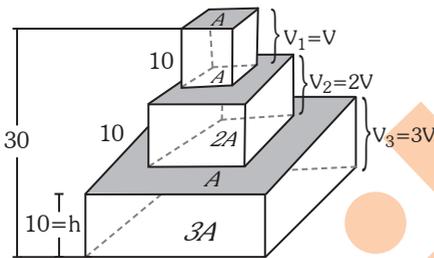
- A) 10^3
- B) 6×10^3
- C) 12×10^3
- D) 6×10^4
- E) 12×10^4

Resolución 27

G. espacio

Prisma

En el gráfico



Piden: A_{BASE}

$$\underline{V_1} = 12 \times 10^4$$

$$\underline{6V} = 12 \times 10^4$$

$$\underline{3V} = 6 \times 10^4$$

$$\underline{A_{BASE} \times h} = 6 \times 10^4$$

$$A_{BASE} = 6 \times 10^3$$

Rpta.: 6×10^3

Pregunta 28

Si el número de lados de un polígono convexo disminuye en dos, el número de diagonales disminuye en quince. Calcule la suma de las medidas de los ángulos internos del polígono inicial en grados sexagesimales.

- A) 1440
- B) 1620
- C) 1800
- D) 1980
- E) 2160

Resolución 28

Polígonos

Teoremas

	Nº de lados	Nº diagonales
Polígono inicial	n	$\frac{n(n-3)}{2}$
Polígono final	$n - 2$	$\frac{(n-2)(n-5)}{2}$

Piden $S_{m \leq i}$ polígono inicial

$$\frac{n(n-3)}{2} - \frac{(n-2)(n-5)}{2} = 15$$

$$n^2 - 3n - n^2 + 7n - 10 = 30$$

$$4n = 40$$

$$n = 10$$

$$S_{m \leq i} = 180^\circ(10 - 2) = 1440^\circ$$

Rpta.: 1440

Pregunta 29

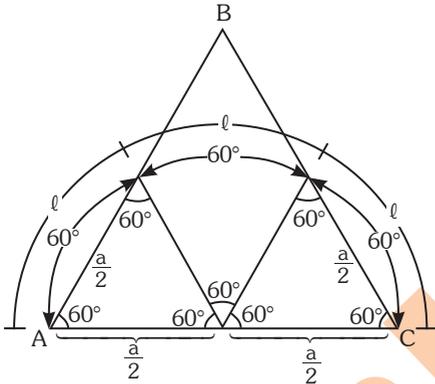
Se traza una circunferencia que tiene como diámetro uno de los lados de un triángulo equilátero de lado "α". La longitud de la parte de la circunferencia que queda dentro del triángulo es:

- A) $\frac{\pi a}{6}$
- B) $\frac{\pi a}{3}$
- C) $\frac{\pi a}{\sqrt{3} + 1}$
- D) $\frac{\pi a}{\sqrt{2}}$
- E) $\frac{\pi a}{\sqrt{2} + 1}$

Resolución 29

Circunferencia

Circunferencia - Ángulos



Piden "ℓ".

$$3\ell = \pi\left(\frac{a}{2}\right)$$

$$\therefore \ell = \frac{a\pi}{6}$$

Rpta.: $\frac{\pi a}{6}$

Pregunta 30

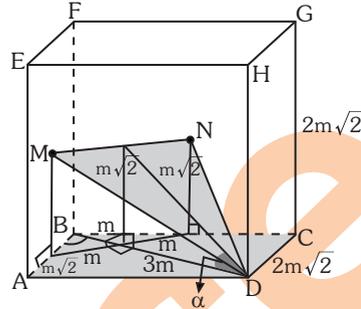
ABCD-EFGH es un hexaedro regular; M y N centros de las caras ABFE y BFGC respectivamente. Calcule la medida del diedro que forman los planos MND y ADC.

- A) $\arctan\left(\frac{1}{3}\right)$
- B) $\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$
- C) $\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$
- D) $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
- E) $\arctan\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

Resolución 30

Geometría del espacio

Poliedros regulares



Piden "α".

M y N están a la misma distancia del \square ABCD. La medida del diedro formado por los planos MND y ADC es "α".

$$\therefore \alpha = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

Rpta.: $\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

Pregunta 31

Se desea diseñar un mosaico compuesto por tres mayólicas que deben tener la forma de polígonos regulares, de tal manera que al menos dos mayólicas sean congruentes con un vértice común.

Los lados de cada mayólica deben tener una longitud de 1 m y la suma de las medidas de los ángulos interiores de las mayólicas que tiene el vértice común es 360°. Calcule el mayor perímetro (en m) que debe tener el mosaico obtenido.

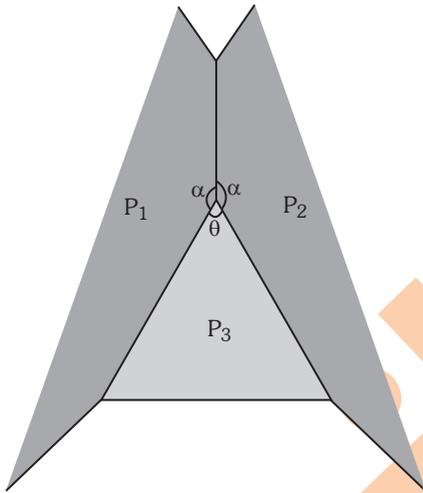
- A) 20
- B) 21
- C) 22
- D) 23
- E) 24

Prohibida su venta

Resolución 31

Polígonos

Polígonos regulares



Piden el mayor perímetro del mosaico
 Los polígonos congruentes P_1 y P_2 deben tener la mayor cantidad de lados.
 Para ello “ α ” debe ser máximo y “ θ ” debe ser mínimo.
 $\rightarrow \theta = 60^\circ$
 $y \alpha = 150^\circ$
 Los polígonos congruentes tendrían 12 lados.
 \therefore Perímetro = 21

Rpta.: 21

Pregunta 32

Sean los segmentos \overline{AB} y \overline{CD} ubicados en planos diferentes, que forman un ángulo que mide 30° . Si $AC \perp AB$, $AC \perp CD$, $AC = 2$ m, $AB = 4$ m y $CD = \sqrt{3}$ m, entonces la longitud (en m) de \overline{BD} es:

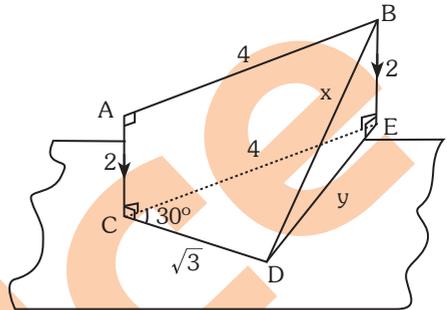
- A) $\sqrt{10}$
- B) $\sqrt{11}$
- C) $\sqrt{12}$

- D) $\sqrt{13}$
- E) $\sqrt{14}$

Resolución 32

Geometría del espacio

Distancia entre alabeadas



Piden “x”.

- En $\triangle ECD$:
 $y^2 = 4^2 + \sqrt{3}^2 - 2(4)(\sqrt{3}) \cdot \cos 30^\circ$
 $y^2 = 7$
- En $\triangle BED$:
 $x^2 = 2^2 + y^2$
 $x = \sqrt{11}$

Rpta.: $\sqrt{11}$

Pregunta 33

Tres ángulos α° , β° y γ° medidos positivamente son coterminales con el ángulo de 7000° , también medido positivamente.

Determine la suma de los menores ángulos con esa propiedad si se tiene que $\alpha^\circ < \beta^\circ < \gamma^\circ$.

- A) 480°
- B) 840°
- C) 1200°
- D) 1560°
- E) 1920°

Resolución 33

Razones trigonométricas de un ángulo de cualquier magnitud

Ángulos coterminales

Si α° , β° y γ° son coterminales con 7000°

\Rightarrow ángulo coterminal = $7000^\circ - 360^\circ K$; $K \in \mathbb{Z}$

Son los menores positivos ($\alpha^\circ < \beta^\circ < \gamma^\circ$)

Para:

$$K=19 \rightarrow \alpha=160^\circ$$

$$K=18 \rightarrow \beta=520^\circ$$

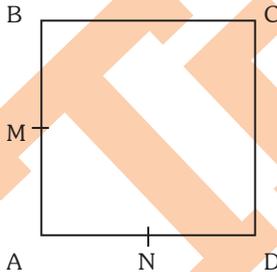
$$K=17 \rightarrow \gamma=880^\circ$$

Piden: $\alpha + \beta + \gamma = 1560^\circ$

Rpta.: 1560°

Pregunta 34

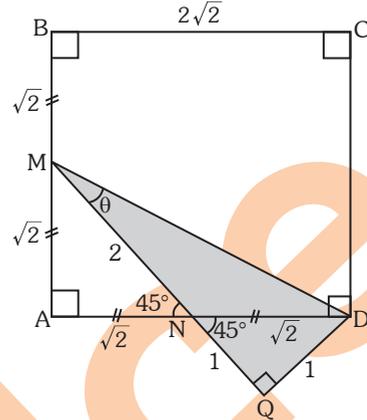
En el cuadrado ABCD de la figura mostrada, M y N son puntos medios de sus respectivos lados. Si $m\angle NMD = \theta$, entonces el valor de $\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$ es:



- A) $\sqrt{5} - 2$
- B) $\sqrt{10} - 3$
- C) $\sqrt{5} + 2$
- D) $\sqrt{10} + \sqrt{5}$
- E) $\sqrt{10} + 3$

Resolución 34

Razones trigonométricas de un ángulo agudo



$$\triangle MQD: \tan\theta = \frac{1}{3}$$

$$\cot\frac{\theta}{2} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta \rightarrow \cot\frac{\theta}{2} = \sqrt{10} + 3$$

Rpta.: $\sqrt{10} + 3$

Pregunta 35

Determine el valor máximo de la siguiente función.

$$y(x) = \sqrt{(1 - \cos x)(1 + 2 \cos x)}; x \in \left\langle 0, \frac{2\pi}{3} \right\rangle$$

- A) $\frac{3}{4}$
- B) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$
- C) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
- D) $\frac{6}{4}$
- E) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

Prohibida su venta

Resolución 35

Funciones trigonométricas

Dominio y rango

$$y(x) = \sqrt{\frac{1}{2}(2 - 2\cos x)(1 + 2\cos x)}$$

Si $a+b = \text{constante}$, entonces $P = a \cdot b$ es máximo cuando $a=b$

$$2 - 2\cos x = 1 + 2\cos x$$

$$\frac{1}{4} = \cos x \quad x \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$$

Reemplazando:

$$y(x) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(2 - 2 \cdot \frac{1}{4}\right)\left(1 + 2 \cdot \frac{1}{4}\right)}$$

$$y(x)_{\text{máx}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Rpta.: $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

Pregunta 36

Determine el valor de "x" si se cumple que

$$\arctan(x + \sqrt{5}) + \operatorname{arccot}(5x - 2) = \frac{\pi}{2}$$

- A) $(2 + \sqrt{5})$
- B) $\frac{1}{2}(2 + \sqrt{5})$
- C) $\frac{1}{2}(2 - \sqrt{5})$
- D) $\frac{1}{4}(2 + \sqrt{5})$
- E) $\frac{1}{6}(2 - \sqrt{5})$

Resolución 36

Funciones trigonométricas inversas

$$\arctan(N) + \operatorname{arccot}(N) = \frac{\pi}{2}; N \in \mathbb{R}$$

$$\arctan(x + \sqrt{5}) + \operatorname{arccot}(5x - 2) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x + \sqrt{5} = 5x - 2$$

$$x = \frac{\sqrt{5} + 2}{4}$$

Rpta.: $\frac{1}{4}(2 + \sqrt{5})$

Pregunta 37

De las relaciones:

$$\tan x = \cot y$$

$$\cos(\pi \cos x) = \sin(\pi \sen y)$$

$$\text{donde } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right); y \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$$

Calcule $E = \sec x$.

- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) 3
- E) 4

Resolución 37

Ecuaciones trigonométricas

Sistema de ecuaciones

$$\tan x = \cot y \dots\dots\dots (1)$$

$$\cos(\pi \cos x) = \sin(\pi \sen y) \dots (2)$$

$$\text{de (1)} \quad x + y = \frac{\pi}{2}; x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), y \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{de (2)} \quad \pi \cos x + \pi \sen y = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{matrix} \Downarrow & \Downarrow \\ \cos x + \cos x = \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$\cos x = \frac{1}{4}$$

$$\sec x = 4$$

Rpta.: 4

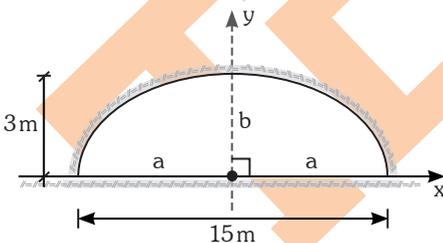
Pregunta 38

Se desea construir un túnel en una montaña entre dos pueblos en Huancayo, que tenga como sección transversal un arco semielíptico, con eje mayor de 15 metros y una altura en el centro de 3 metros. Encuentre la ecuación canónica de la elipse sobre la que descansa la sección transversal del túnel.

- A) $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{9} = 1$
- B) $\frac{x^2}{56,25} + \frac{y^2}{2,25} = 1$
- C) $\frac{x^2}{56,25} + \frac{y^2}{9} = 1$
- D) $\frac{x^2}{900} + \frac{y^2}{36} = 1$
- E) $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{6} = 1$

Resolución 38

Ecuación de la elipse



Elipse horizontal, entonces

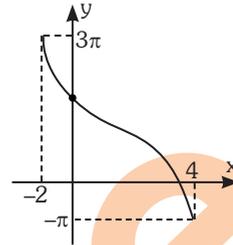
$$a = 7,5 \wedge b = 3 \therefore$$

Ecuación: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{56,25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Rpta.: $\frac{x^2}{56,25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Pregunta 39

Si la gráfica de $y = A \arccos(Bx+C)+D$ es



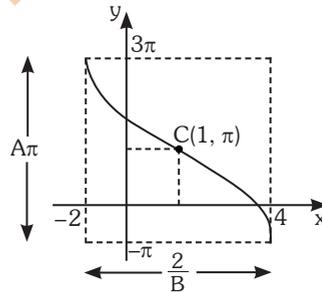
Determine el valor de $E=A+B+C$.

- A) 3
- B) $\frac{2}{3}$
- C) $\frac{4}{3}$
- D) 4
- E) $\frac{14}{3}$

Resolución 39

Trigonometría

Funciones trigonométricas inversas



$y = A \arccos(Bx+C)+D$

- I) $\frac{2}{B} = 6$
- $B = \frac{1}{3}$
- II) $A\pi = 4\pi$
- $A = 4$

III) Abscisa del centro:

$$Bx + C = 0$$

$$x = -\frac{C}{B}$$

$$1\left(\frac{1}{3}\right) = -C$$

$$C = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore A + B + C = 4 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 4$$

Pregunta 40

Si $1 + \tan^2\theta - \cot\theta = 0$.

Calcule el valor de

$$E = \sqrt[3]{9 + \cos^4\theta - \tan^2\theta \cdot \csc^2\theta}$$

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) 5

Resolución 40

Identidades trigonométricas de una variable

Usando el dato:

$$1 + \tan^2\theta = \cot\theta$$

$$\sec^2\theta = \cot\theta$$

$$\cos^2\theta = \tan\theta$$

$$\cos^4\theta = \tan^2\theta$$

Piden:

$$E = \sqrt[3]{9 + \cos^4\theta - \tan^2\theta \cdot \csc^2\theta}$$

$$E = \sqrt[3]{9 + \tan^2\theta - \sec^2\theta}$$

$$E = \sqrt[3]{9 + (-1)}$$

$$E = \sqrt[3]{8}$$

$$\therefore E = 2$$

Rpta.: 4

Rpta.: 2