Trilce
ACADEMIA

Solucionario

Examen UNI 2023-I

Matemática

Miércoles 15 de febrero

ÁLGEBRA

Pregunta 01

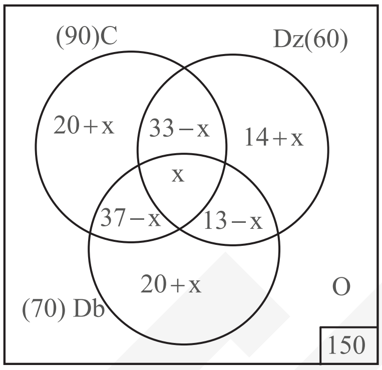
En la semana cultural de la UNI se inscribieron 150 estudiantes universitarios, que participaron en actividades de canto, danza y debate, dentro de la universidad. Todos participaron por lo menos en alguna de las actividades. 90 participaron en canto, 60 en danza, 70 en debate, 33 en canto y danza, 13 en danza y debate y 37 en canto y debate.

Determine cuántos alumnos participaron en 3 actividades.

A) 13
B) 15
C) 14
D) 12
E) 16

Resolución 01

Conjuntos



$\rightarrow 90 + 20 + x + 13 - x + 14 + x = 150$

$x = 13$

Rpta.: 13

Pregunta 02

Determine el número de soluciones de la ecuación:

$\log_{\sqrt{x+3}} \sqrt{x^2+21x+110} = 2$

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) Infinitas

Resolución 02

Logaritmos en $\mathbb{R}$

$\log_{\sqrt{x+3}} \sqrt{x^2+21x+110} = 2$

I. $x^2+21.x+110>0 \quad \wedge \quad x+3>0 \ \wedge \ x+3\neq 1$

$(x+10)(x+11)>0 \qquad x>-3 \qquad x\neq -2$

$x \in <-\infty;-11> \cup <-10;+\infty> \qquad x \in <-3;+\infty>$

$CS_1 = <-3;+\infty> - \{-2\}$

II. $\sqrt{x^2+21.x+110} = (\sqrt{x+3})^2$

$x^2 + 21.x+110 = x^2 + 6.x + 9$

$x = -\frac{101}{15}$

$CS_2 = \left\{-\frac{101}{15}\right\}$

$CS_1 \cap CS_2 = \phi$

$\therefore$ El número de soluciones de la ecuación es cero.

Rpta.: 0

Pregunta 03

Determine si cada uno de los enunciados es verdadero (V) o falso (F) y escriba la secuencia correcta:

I. $\{3\} = \{x \in N \mid 1 < x < 5\}$

II. Sean $A = \{x \in R \mid x < 0 \wedge x \in N\}$ y $B = \{x \in R \mid x \in Q \wedge x \in I\}$, entonces $A = B$.

III. El conjunto $\{7, 8\}$ tiene cuatro subconjuntos.

A) FVV
B) VVV
C) FVF
D) FFV
E) FFF

Resolución 03

Conjuntos

I. (F); $\{x \in N / 1<x<5\} = \{2;3;4\} \neq \{3\}$

II. (V); Q: conjunto de los números racionales

II: Conjunto de los números irracionales

$A = \{x \in R / x < O \wedge x \in N\} = \phi$

$B = \{x \in R / x < Q \wedge x \in II\} = \phi$

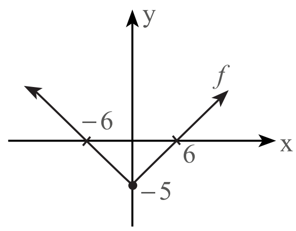
$\Rightarrow A = B$

III. (V); $n(A) = 2 \rightarrow$ N° subconjuntos $= 2^2 = 4$

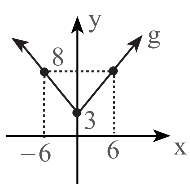
Rpta.: FVV

Pregunta 04

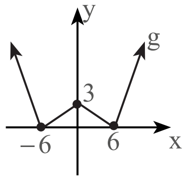
La gráfica de una función f: R $\rightarrow$ R está dada por:



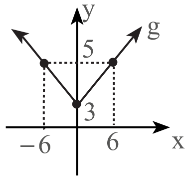
Determine la gráfica de $g(x) = |f(-x) + 8|$

A) 

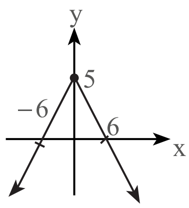
B)



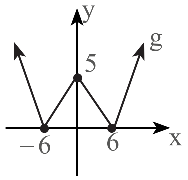
C)



D)

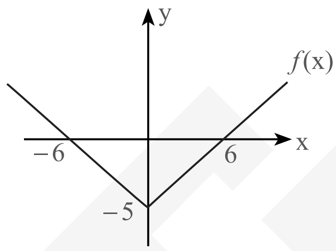


E)

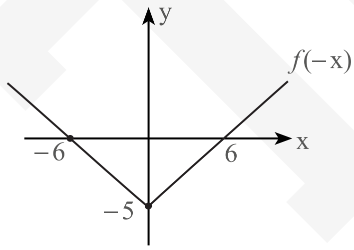


Resolución 04

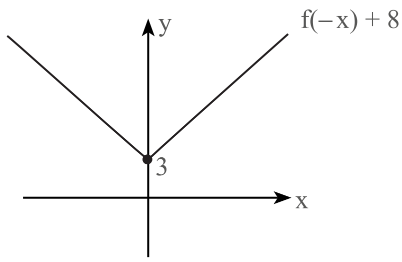
De la función:



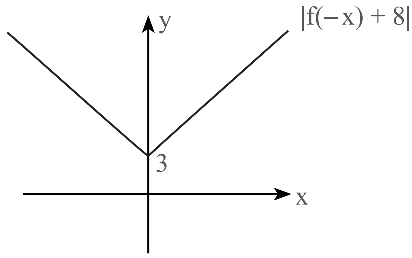
I. $f(-x)$: la gráfica se refleja con respecto al eje "y".



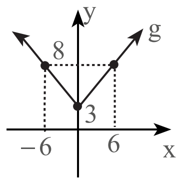
II. $f(-x)+8$: desplazamiento vertical hacia arriba 8 unidades.



III. $|f(-x)+8|$: todo lo que está por debajo del eje "x" se refleja hacia arriba, en este caso la gráfica no cambia.



Rpta.:



Pregunta 05

En un problema de programación lineal, la región factible viene dada por un polígono convexo acotado, cuyos vértices son $(0;0)$, $(0;6)$, $(7;6)$ y $(3;0)$. Sea la función objetivo f, dada por $f(x,y)=2x-2y$, entonces el valor máximo de f es:

A) 2
B) 4
C) 6
D) 10
E) 12

Resolución 05

Del dato, se tiene los vértices de la región factible, entonces:

$(0;0) \rightarrow f(0;0)=0$

$(0;6) \rightarrow f(0;6)=-12$

$(7;6) \rightarrow f(7;6)=2$

$(3;0) \rightarrow f(3;0)=6$

$\therefore$ El valor máximo de f es: 6

Rpta.: 6

Pregunta 06

Sean $(x_1;y_1)$ y $(x_2;y_2)$ las dos únicas soluciones del siguiente sistema:

$x^2+2x+y=-1 \qquad x^2+4x-y+3=0$

Calcule el valor de $(x_1+x_2)-5(y_1+y_2)$

A) –2
B) –1
C) 0
D) 1
E) 2

Resolución 06

$x^2+2.x+y=-1$ .... (I)

$x^2+4.x-y+3=0$ ....(II)

(I) + (II) $\qquad 2x^2+6x+4=0$

$x^2+3.x+2=0$

$x_1=-2 \qquad x_2=-1$

$y_1=-1 \qquad y_2=0$

Nos piden: $(x_1+x_2)-5(y_1+y_2)$

$(-3)-5(-1)=2$

Rpta.: 2

Pregunta 07

Considere las matrices de 2×2

$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

Calcule la suma de los elementos de la matriz $C = A^6 + B^3$.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

Resolución 07

- $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ calculando A^2 se tiene: $A^2=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ A^3 será: $A^3=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Luego A^3 = I; I: matriz identidad

  Entonces: $A^6 = I$.

- $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

  Calculando: $B^2=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

  Luego: $B^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \longrightarrow B^3 = I$

  Nos piden: $C = A^6 + B^3 = I + I = 2.I$

  $C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

  La suma de los elementos de la matriz C es 4

Rpta.: 4

Pregunta 08

Calcule la traza de $A^{-1} + B^{-1}$

siendo $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

A) $\frac{5}{4}$
B) $\frac{7}{4}$
C) $\frac{9}{4}$
D) $\frac{11}{4}$
E) $\frac{13}{4}$

Resolución 08

- $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

como A es una matriz diagonal, entonces $\mathrm{Traz}(A^{-1})=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+1=\frac{7}{4}$

- $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \longrightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

  $\mathrm{Traz}(B^{-1}) = 1$

  $\therefore\ \mathrm{Traz}(A^{-1}+B^{-1})=\frac{11}{4}$

Rpta.: $\frac{11}{4}$

Pregunta 09

Determine el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$x-2\quad \sqrt{x^2-x-6}$

A) $\left[3;\frac{10}{3}\right]$
B) $\left[3;\frac{10}{3}\right\rangle$
C) $\left\langle 3;\frac{10}{3}\right]$
D) $\left\langle -2;\frac{10}{3}\right]$
E) $\left[2;\frac{10}{3}\right]$

Resolución 09

$x-2\quad \sqrt{x^2-x-6}$

$x-2>0$ ∧	$x^2-x-6\geq 0$ ∧	$(x-2)^2>x^2-x-6$
$x>2$	$(x-3)(x+2)\geq 0$	$x^2-4x+4>x^2-x-6$
$x\in\langle 2;+\infty\rangle$	$x\in\langle -\infty;-2]\cup[3;+\infty\rangle$	$x\quad \frac{10}{3}$
		$x\in\left\langle -\infty;\frac{10}{3}\right\rangle$

al intersectar: $CS=\left[3;\frac{10}{3}\right\rangle$

Rpta.: $\left[3;\frac{10}{3}\right\rangle$

Pregunta 10

Se tiene una progresión geométrica $(a_n)_{n\in N}$ con razón r, que cumple:

$a_1 - a_2 + a_3 = 7$

$a_4 - a_5 + a_6 = 56$

Calcule: $\frac{a_1}{r}$

A) $\frac{7}{9}$
B) $\frac{7}{6}$
C) $\frac{7}{5}$
D) 2
E) 3

Resolución 10

Progresión geométrica $\{a_n\}_{n\in N}$

razón: r

- $a_1 - a_2 + a_3 = 7$

  $a_1 - (a_1 . r) + (a_1 . r^2) = 7$

  $a_1 (r^2 - r + 1) = 7$ I

- $a_4 - a_5 + a_6 = 56$

  $a_1 . r^3 - a_1 . r^4 + a_1 . r^5 = 56$

  $a_1 . r^3 (r^2 - r + 1) = 56$ II

  (II) ÷ (I): $r^3 = 8$

  $r = 2$

  En (I) $a_1 = \frac{7}{3}$

  Nos piden: $\frac{a_1}{r}=\frac{7}{6}$

Rpta.: $\frac{7}{6}$

ARITMÉTICA

Pregunta 11

Se tiene dos valores enteros positivos A, B tales que el valor de $M = (A^2 - 4B^2)$ es primo positivo.

Si M toma el valor mínimo, calcule A + B.

A) 6
B) 9
C) 13
D) 15
E) 4

Resolución 11

Números primos

$M = A^2 - 4B^2$; siendo M primo y mínimo

$\underbrace{M}_{5} = \underbrace{(A+2B)}_{5}\underbrace{(A-2B)}_{1} \longrightarrow A = 3 \wedge B = 1$

Piden: A+B = 4

Rpta.: 4

Pregunta 12

Entre el cuadrado de un valor entero N de 2 cifras y el cuadrado de su complemento aritmético existen 2999 valores enteros (no se incluyen los cuadrados ambos).

Calcule |N – CA(N)|, donde CA(N) significa el comportamiento aritmético de N.

A) 20
B) 30
C) 35
D) 40
E) 45

Resolución 12

Cuatro operaciones

Sea $N = \overline{ab}$ (2 cifras)

Dato: $\underbrace{N^2+1; N^2+2; ...; (100-N)^2-1}_{\text{2999 números}}$

$(100 - N)^2 - 1 - (N^2 + 1) - 1 = 2999$

$(100 - N)^2 - N^2 = 3000 \rightarrow (100 - 2N).100 = 3000$

$100 - 2N = 30$ $N = 35 \wedge CA(N) = 65$

Piden: $|N - CA(N)| = |35 - 65| = 30$

Rpta.: 30

Pregunta 13

Determine el valor de $a+b+c+d-13$, si $\frac{17}{\overline{ab}}+\frac{\overline{cd}}{19}=a+d$ y $\overline{ab} = 19$.

A) –1
B) 0
C) 1
D) 2
E) 3

Resolución 13

Números Racionales

$\frac{17}{\overline{ab}}+\frac{\overline{cd}}{19} = a + d; \overline{ab} = 19 \longrightarrow a = 1 \wedge b = 9$

$\frac{17+\overline{cd}}{19} = 1 + d \longrightarrow 17 + 10c + d = 19 + 19d$

$10c = 18d + 2 \rightarrow c=2 \wedge d=1$

Piden: $a + b + c + d - 13 = 0$

Rpta.: 0

Pregunta 14

Se tiene una aleación de plata y cobre que pesa 150 gr y tiene como ley 0,90, que es resultado de fundir 2 aleaciones, uno de los cuales es de 80 gr de plata pura. Exprese la ley de la otra aleación como una fracción irreductible. Dé como respuesta la suma del numerador y del denominador.

A) 10
B) 13
C) 14
D) 15
E) 25

Resolución 14

Mezcla y aleación

Masa (g)	80	+ 70	=	150
Ley	1	L		0,90

$80 + 70\,L = 135$

$L = \frac{55}{70} = \frac{11}{14}$

Piden: 11+14 = 25

Rpta.: 25

Pregunta 15

El 20 de enero de 2023 se abrió una cuenta en un banco con 10 000 dólares, el dinero se capitaliza diariamente, la tasa de interés anual efectiva es de 20 %. Calcule el interés obtenido para la fecha 09 de marzo del 2023. Dé como respuesta la suma de las cifras de la parte entera de este interés.

Utilice el dato numérico: $(1,20)^{24/365} = 1,020604$.

A) 7
B) 8
C) 9
D) 10
E) 11

Resolución 15

Regla de interés

Del 20/01/2023 al 09/03/2023 hay 48 días

Datos: capitalización diaria

$C = 10\,000$; TEA = 20% = 0,2; n = 48/365

$M = C(1 + r\%)^n = 10\,000(1+0,2)^{48/365}$

$M = 10\,000\times(1,2^{24/365})^2 = 10\,000\times1,0120604^2$

$M = 10242,66253$

$\Rightarrow I = M - C = 10242,66253 - 10\,000 = 242,66253$

Piden: 2+4+2 = 8

Rpta.: 8

Pregunta 16

Si se cumple que: $S = 54 + 5454 + 545454 + ...\underbrace{545454...54}_{54\text{ cifras}}$,

halle la suma de las dos cifras de menor orden de S.

A) 6
B) 8
C) 9
D) 10
E) 13

Resolución 16

$$\left.\begin{array}{ccccccc|cc|l} & & & & & & & 5 & 4 & + \\ & & & & & 5 & 4 & 5 & 4 & \\ & & & 5 & 4 & 5 & 4 & 5 & 4 & \\ & & & & & & & & \vdots & \\ & \dots & & 5 & 4 & 5 & 4 & 5 & 4 & \\ \hline & & & & & & \dots & a & b & \end{array}\right\} 27\text{ sumandos}$$

$\Rightarrow 54\times 27 = \overline{...ab} \rightarrow \overline{ab} = 58$

Piden: $5 + 8 = 13$

Rpta.: 13

Pregunta 17

¿Cuántos números $\overline{24XY}$ son divisibles entre 3 y al dividirlos entre 5 el residuo es 3?

A) 6
B) 7
C) 8
D) 9
E) 10

Resolución 17

Divisibilidad

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\quad \overline{24xy} = \overset{\circ}{3} = \overset{\circ}{3} + 3 \\ \bullet\quad \overline{24xy} = \overset{\circ}{5} + 3 \end{array}\right\} \overline{24xy} = \overset{\circ}{15} + 3$$

Descomponiendo:

$2400 + \overline{xy} = \overset{\circ}{15} + 3$

$\overline{xy} = \overset{\circ}{15} + 3$

$\Rightarrow \overline{xy} \in \{03;18;33;48;63;78:93\}$

Hay 7 numerales

Rpta.: 7

Pregunta 18

¿Cuántos números de tres cifras que terminan en 6 son divisibles entre 18?

A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 10

Resolución 18

Divisibilidad

Sea $N = \overline{ab6} = 18k \rightarrow k = ...2$ o $k = ...7$

Sabemos: $100 \leq N < 1000$

$100 \leq 18k < 1000 \rightarrow 5,5 \leq k < 55,5$

$k \in \{7;12;17;...;52\} \rightarrow 10$ valores

Rpta.: 10

Pregunta 19

Se tiene 5 números naturales pares $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$ cuya media, mediana y moda son iguales a 20. ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar x_5?

A) 54
B) 46
C) 38
D) 36
E) 26

Resolución 19

Estadística

Dato: $Mo = Me = \overline{x} = 20$

Números: $\underbrace{x_1}_{\text{mín}} \leq \underbrace{x_2}_{\text{mín}} \leq \underbrace{x_3}_{20} \leq \underbrace{x_4}_{\text{mín}} \leq \underbrace{x_5}_{\text{máx}}$

$$\Rightarrow \overline{x} = \frac{2 + 4 + 20 + 20 + x_5}{5} = 20$$

$46 + x_5 = 100 \rightarrow x_5 = 54$

Rpta.: 54

Pregunta 20

Sea $Z^* = Z - \{0\}$. Dada la relación definida sobre $Z\times Z^*$ como:

con: $(a,b) \sim (c,d) \leftrightarrow a\,.\,d = b\,.\,c$,

(a,b) y $(c,d) \in Z\times Z^*$

indique el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

I. (1,4),(1,6) y (1,8) pertenecen a una misma clase de equivalencia.

II. El gráfico de la clase de equivalencia $\left[\frac{p}{q}\right]$ con p, q ∈ Z, $q \neq 0$ es una recta.

III. En las clases de equivalencias:

$$\left(\left[\frac{m}{n}\right]\cap\left[\frac{p}{q}\right]\neq 0\right)\longrightarrow\left[\frac{m}{n}\right]=\left[\frac{p}{q}\right]$$

(m, n, p, q ∈ Z y n, q ≠ 0)

A) FFV
B) FVF
C) VVF
D) VFV
E) VFF

Resolución 20

Números racionales

I. (F); ya que $\frac{1}{4} \neq \frac{1}{6}$ y $\frac{1}{6} \neq \frac{1}{8}$

II. (F); la gráfica de la clase de equivalencia [p/q] son puntos que pertenecen a una recta que pasa por el origen.

III. (V); si $\left[\frac{m}{n}\right] \cap \left[\frac{p}{q}\right] \neq \phi$ entonces (m,n) y (p,q) pertenecen a la misma de equivalencia, es decir: $\left[\frac{m}{n}\right] = \left[\frac{p}{q}\right]$

Rpta.: FFV

GEOMETRÍA

Pregunta 21

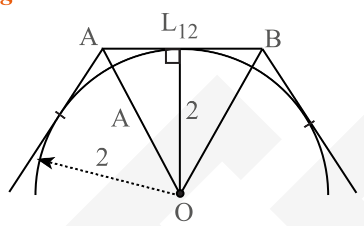
Calcule la longitud (en cm) del lado de un dodecágono regular, sabiendo que el radio de las circunferencia inscrita mide 2 cm.

A) $4(2 + \sqrt{3})$
B) $4(2 - \sqrt{3})$
C) $4(3 - \sqrt{3})$
D) $4(4 - \sqrt{3})$
E) $3(2 - \sqrt{3})$

Resolución 21

Polígonos regulares

Dodecágono regular



Piden L_{12}

AP = 2 si OA = OB = R

$\frac{R\sqrt{2+13}}{2} = 2$

$R = 4\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$L_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}} = 4\sqrt{2-\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$\boxed{L_{12} = 4(2\sqrt{3})}$

Rpta.: $4(2 - \sqrt{3})$

Pregunta 22

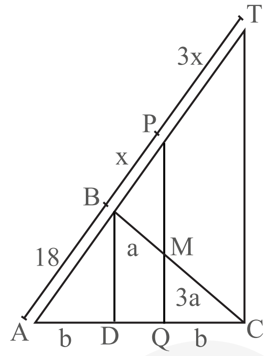
En un triángulo ABC, se traza la ceviana $\overline{BD}$ (D pertenece al segmento $\overline{AC}$). En la prolongación del segmento $\overline{AB}$ se ubica el punto P y se traza el segmento $\overline{PQ}$ paralelo al segmento $\overline{BD}$ (Q pertenece al segmento $\overline{DC}$). Dicha paralela interseca al segmento $\overline{BC}$ en M. Si AB = 18 cm, 3BM = MC y AD = QC m, entonces calcule la longitud (en cm) del segmento BP.

A) 4
B) 5
C) 6
D) 9
E) 3

Resolución 22

Proporcionalidad

Teorema Thales



Piden: BP = x

Trazo $\overline{TC}$ // $\overline{PQ}$

ΔTBC: Thales PT = 3x

ΔATC: Thales

$\frac{18}{b} = \frac{3x}{b}$ $\boxed{x = 6}$

Rpta.: 6

Pregunta 23

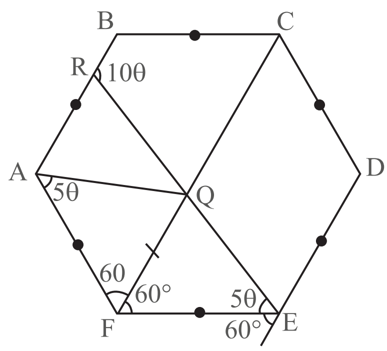
Si ABCDEF es un hexágono regular sobre $\overline{AB}$ se ubica un punto R, que al ser unido con E determina un segmento secante a $\overline{FC}$ en el punto Q. Si m∢FAQ = 5θ y m∢ERB = 10θ, calcule el valor de θ.

A) 10°
B) 8°
C) 12°
D) 14°
E) 16°

Resolución 23

Polígonos

Hexágono



Piden: θ

ΔAFQ ≅ ΔEFQ la m∢QEF = 5θ

$m∢e = \frac{360}{6} = 60°$

$\overline{AB}$//$\overline{DE}$

10θ = 5θ + 60°

θ = 12°

Rpta.: 12°

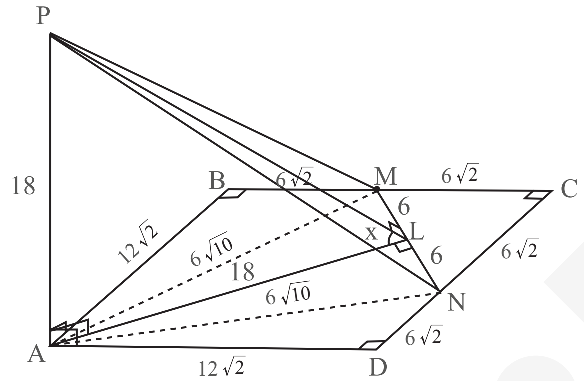
Pregunta 24

Del vértice A del cuadrado ABCD se traza $\overline{AP}$ perpendicular al plano que contiene al cuadrado mencionado. Luego, se une el punto P con los puntos medios M y N de $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente. Si AP = 18 cm y AB = $12\sqrt{2}$ cm, en el tetraedro A – PMN calcule la medida del ángulo diedro P – MN – A.

A) 30°
B) 37°
C) 60°
D) 45°
E) 53°

Resolución 24

Ángulo diedro



- Piden: medida del diedro P – MN – A
  es decir piden "x"
- Se observa: ΔAMN es isósceles, pues AM = AN = $6\sqrt{10}$
  entonces ML = LN = 6
- Luego: AL = 18
- Finalmente el ΔAPL es notable de 45° y 45°
  pues: AP = AL = 18
  $\therefore$ x = 45°

Rpta.: 45°

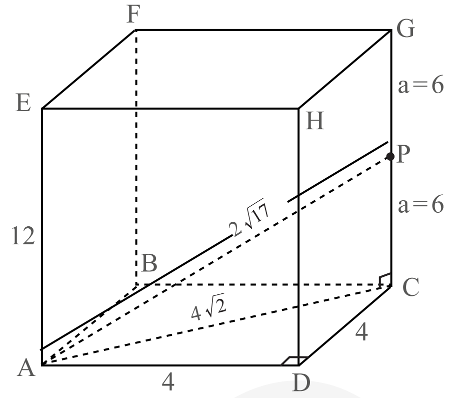
Pregunta 25

En un prisma regular ABCD – EFGH cuya arista básica mide 4 m y P es punto medio de $\overline{CG}$. Si AP = $2\sqrt{17}$ m, calcule (en m^2) el área de la superficie total del prisma.

A) 112
B) 224
C) 256
D) 290
E) 178

Resolución 25

Prisma



- Piden: Área total
- Teorema de Pitágoras: ΔAPC

$a^2 + (4\sqrt{2})^2 = (2\sqrt{17})^2$

$a = 6$

entonces: $\text{Área}_{\text{total}} = \text{Área}_{\text{lat.}} + 2\text{Área}_{\text{base}}$

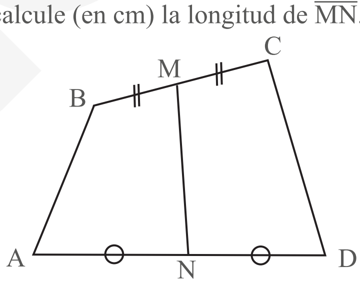
$= (16)(12) + 2(4^2)$

$\therefore$ Área total = 224 m^2

Rpta.: 224

Pregunta 26

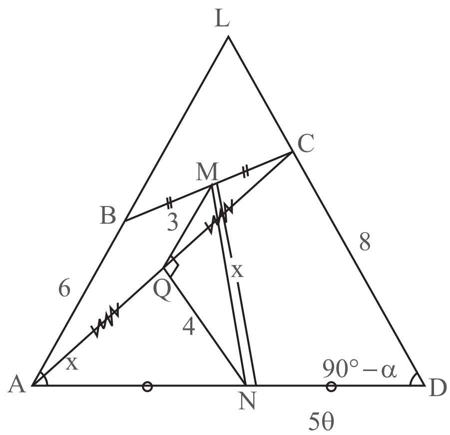
En la figura, si m$\measuredangle$BAD = α, m$\measuredangle$ADC = 90° – α, AB = 6 y CD = 8 cm. calcule (en cm) la longitud de $\overline{MN}$.



A) 5
B) 4
C) 7
D) 1
E) 3

Resolución 26

Cuadriláteros



- Piden: x
- Se traza $\overline{AC}$, luego en el ΔABC, $\overline{MQ}$ es base media entonces: $MQ = 3$
- Se observa en el ΔACD, $\overline{NQ}$ es base media entonces $NQ = 4$.
- Luego: $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ forman 90°, entonces sus paralelas: $\overline{MQ}$ y $\overline{QN}$ también formarán 90°.
- Se observa: ΔQMN es notable de 37° y 53°

  $\therefore x = 5$

Rpta.: 5

Pregunta 27

En un trapecio ABCD, cuyas bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ miden 19 cm y 27 cm respectivamente. Si P es un punto de $\overline{AD}$ tal que al unir con el punto C resultan dos regiones equivalentes en el trapecio ABCD.
Calcule (en cm) la longitud de $\overline{AP}$.

A) 4
B) 8
C) 3
D) 5
E) 6

Resolución 27

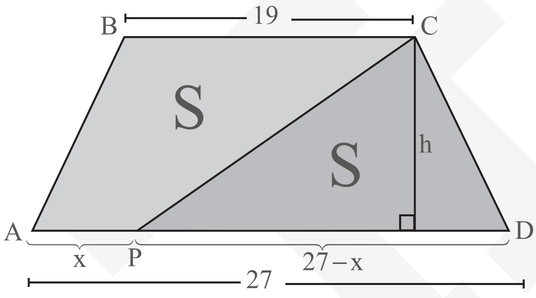
Piden: x

$$\underbrace{A_{\square ABCD}}_{\left(\frac{19+x}{2}\right)^{h}} = \underbrace{A_{\Delta PCD}}_{\frac{(27-x)h}{2}}$$

$19+x = 27 - x$

$2x = 8$

$\therefore x = 4$



Rpta.: 4

Pregunta 28

En una circunferencia $\mathscr{C}$ cuyo radio mide 10 cm, se inscribe un cuadrilátero ABCD. Si m∢CAD = 45°, AB = BD, ℓ_1 es la longitud del arco BC y ℓ_2 es la longitud del arco AD, calcule (en cm) $2\ell_1 + \ell_2$.

A) 12π
B) 10π
C) 7π
D) 15π
E) 5π

Resolución 28

Piden: $2\ell_1 + \ell_2$

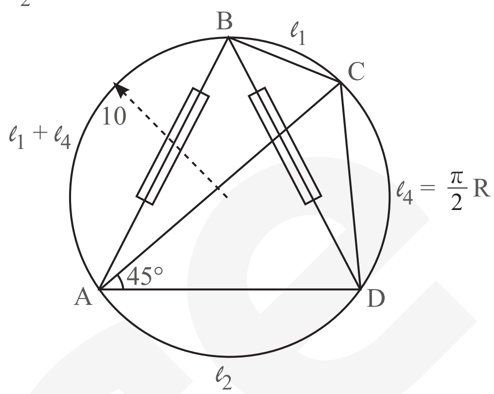
Si: $AB = BD \rightarrow m\overset{\frown}{AB} = \ell_1 + \ell_4$

$\ell_0 = 2\pi R$

$\underbrace{2\ell_1 + \ell_2} + \underbrace{2\ell_4} + = 2\pi(10)$

$2\ell_1 + \ell_2 + \cancel{2}\left(\frac{\pi}{\cancel{2}} \times 10\right) = 20\pi$

$2\ell_1 + \ell_2 = 10\pi$



Rpta.: 10π

Pregunta 29

Los lados de un triángulo ABC inscrito en una circunferencia miden: AB = 12 cm, AC = 10 cm y BC = 8 cm. Por el punto B se traza una tangente a la circunferencia que interseca a la prolongación del lado $\overline{AC}$ en el punto N. Calcule (en cm) la longitud de $\overline{BN}$.

A) 10
B) 9
C) 12
D) 8
E) 14

Resolución 29

Piden: x

$\Delta BCN \approx \Delta ABN$

$\frac{x}{AN} = \frac{8}{12} = \frac{CN}{x}$

$x = 2k$, $AN = 3k$

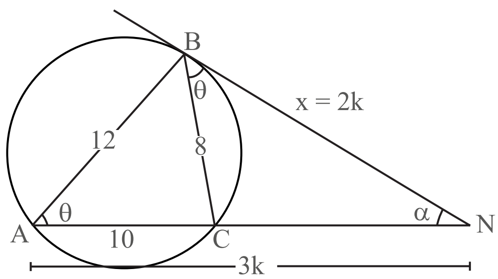
Teorema

$(2k)^2 = 3k(3k - 10)$

$4k = 9k - 30$

$\rightarrow k = 6$

$\therefore x = 12$



Rpta.: 12

Pregunta 30

En un cilindro circular recto, el punto O es el centro de una de sus bases cuyo radio mide 3 m. Si B es un punto de la circunferencia de la base opuesta y $OB = 3\sqrt{3}$ m, calcule (en m^3) el volumen del sólido.

A) $18\pi\sqrt{2}$
B) $29\pi\sqrt{2}$
C) $24\pi\sqrt{2}$
D) $27\pi\sqrt{2}$
E) $21\pi\sqrt{2}$

Resolución 30

Piden: V

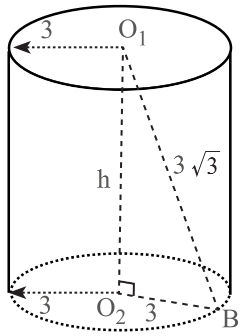
$(3\sqrt{3})^2 = h^2 + 3^2$

$\rightarrow h = 3\sqrt{2}$

$V = A_{base \times h}$

$V = \pi(3)^2 \times 3\sqrt{2}$

$V = 27\pi\sqrt{2}\ u^3$



Rpta.: $27\pi\sqrt{2}$

TRIGONOMETRÍA

Pregunta 31

Sea F = (a;b) el foco de la parábola P de ecuación:

$x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 16y + 64 = 0$

Calcule: a + b.

A) 8
B) 2
C) 6
D) 4
E) 10

Resolución 31

Para eliminar el término mixto xy debemos rotar los ejes un ángulo "θ"

Recordamos

Si: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

$$\boxed{\text{Cot}2\theta = \frac{A-C}{B}}$$

$\Rightarrow \text{Cot}2\theta = \frac{1-1}{-2} = 0 \Longrightarrow 2\theta = 90°$
$\theta = 45°$

Además: $\boxed{\begin{array}{l} x = x'\cos\theta - y'\text{sen}\theta \\ y = x'\text{sen}\theta + y'\cos\theta \end{array}}$

Reemplazamos $\theta = 45° \Longrightarrow x = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}}$

$y = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$

En la ecuación:

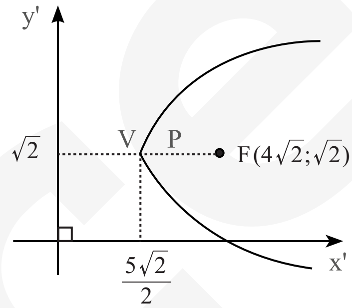
$$\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - 8\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right) - 16\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) + 64 = 0$$

Operando y simplificando:

$$(y' - \sqrt{2})^2 = 6\sqrt{2}\left(x' - \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow V = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right)$$

$$4P = 6\sqrt{2} \Longrightarrow P = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$



en el plano cartesiano: $F(3;5)$ ↓ a ↓ b

Piden: a + b = 8

Rpta.: 8

Pregunta 32

Sean x, y tales que:

$\cos(x+y) = \frac{1}{3}$, $\cos(x) + \cos(y) = \frac{2}{3}$.

Calcule el valor de: cos(x).cos(y)

A) –1/6
B) –1/2
C) 1/3
D) 1/4
E) –1/12

Resolución 32

Si: $\text{Cos}(x+y) = \frac{1}{3} \longrightarrow \text{Cos}\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\text{Cos}(x+y)}{2}}$

$$\text{Cos}\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{3}}{2}}$$

$$\boxed{\text{Cos}\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$$

Además: $\text{Cos}x + \text{Cos}y = \frac{2}{3}$

Transformando: $2\text{Cos}\left(\frac{x+y}{2}\right)\text{Cos}\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{2}{3}$

$$2.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.\text{Cos}\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{\operatorname{Cos}\left(\frac{x-y}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{6}}}$$

Rpta.: – 1/6

Pregunta 33

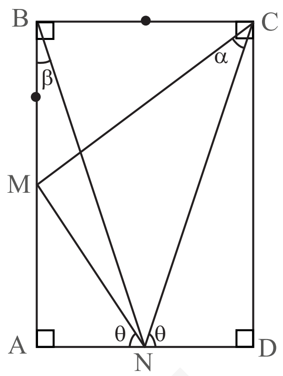
ABCD un rectángulo. Se ubican los puntos M y N sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ respectivamente. Sabiendo que MB = BC, m∢MCN = α, m∢ABN = β; m∢ANM = m∢DNC, y

$\tan(\alpha)=\frac{3}{4}$.

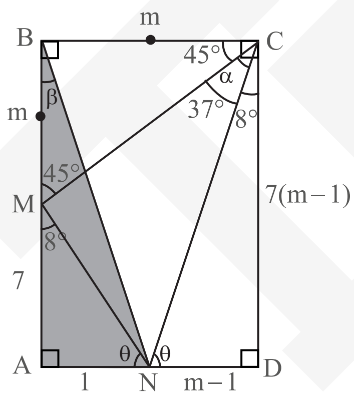
A) 28
B) 25
C) 29
D) 31
E) 32

Resolución 33

Graficando



Dato: $\operatorname{Tan}\alpha=\frac{3}{4}\Longrightarrow\alpha=37°$



Del gráfico m + 7 = 7(m – 1)

$$\boxed{m=\frac{7}{3}}$$

Piden: $3\operatorname{Cot}\beta=3\left(\frac{m+7}{1}\right)$

$$=3\left(\frac{7}{3}+7\right)$$

$\therefore\ 3\operatorname{Cot}\beta=28$

Rpta.: 28

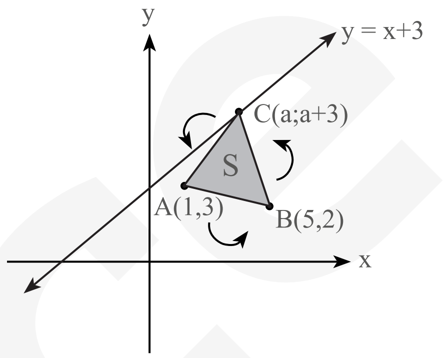
Pregunta 34

Sean los puntos A(1;3), B(5;2). El punto C está ubicado en el primer cuadrante, sobre la recta L de ecuación: y = x+3, de modo que el área de la región triangular ABC es $\frac{19}{2}$ u^2.

A) 11
B) 9
C) 13
D) 15
E) 17

Resolución 34

Ecuación de la recta



Dato: cálculo del área:

$S=\frac{19}{2}\,u^2$

$$\begin{array}{r|cc|l} & 1 & 3 & \\ 15 & 5 & 2 & 2 \\ 2a & a & a+3 & 5a+15 \\ a+3 & 1 & 3 & 3a \\ \hline 3a+18 & & & 8a+17 \end{array}$$

$$S=\frac{8a+17-(3a+18)}{2}$$

$$\frac{19}{2}=\frac{5a-1}{2}\Longrightarrow\boxed{a=4}$$

Coordenadas de C

C(4;7)

Suma de coordenadas de C

Rpta.: 11

Pregunta 35

Sean S, C y R los números de la medida de un ángulo trigonométrico en grados sexagesimales, grados centesimales y en radianes respectivamente. Si $C^2-S^2=\frac{38\pi}{135R}$, calcule el valor de S.

A) 12
B) 9
C) 18
D) 4
E) 6

Resolución 35

Fórmula General de Conversión

Recordando:

$$\frac{S}{180}=\frac{C}{100}=\frac{R}{\pi}\longrightarrow \boxed{C=\frac{10S}{9}}$$

$$\boxed{R=\frac{\pi S}{180}}$$

En el dato:

$$\left(\frac{10S}{9}\right)^2-(S)^2=\frac{38\pi}{135.\frac{\pi S}{180}}$$

$$\frac{19S^2}{81}=\frac{38(180)}{1355}$$

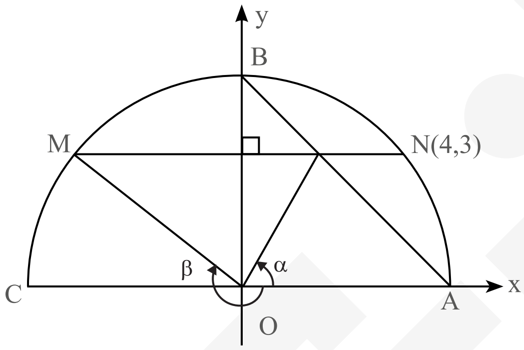
$S^3=6^3$

$S=6$

Rpta.: 6

Pregunta 36

En la figura mostrada ABC es un semicircunferencia, en donde $\overline{MN}\perp\overline{OB}$ y O es origen de coordenadas. Calcule el valor de: $\cot(\alpha)+\cot(\beta)$



A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{3}{2}$

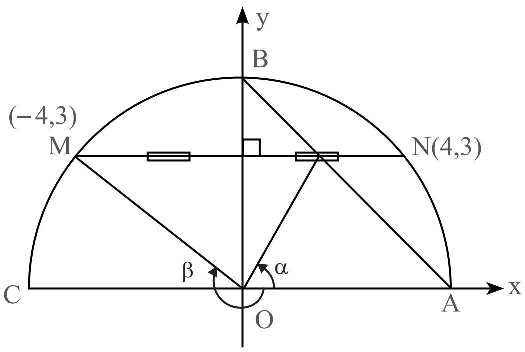
C) $\frac{3}{4}$

D) $\frac{-2}{3}$

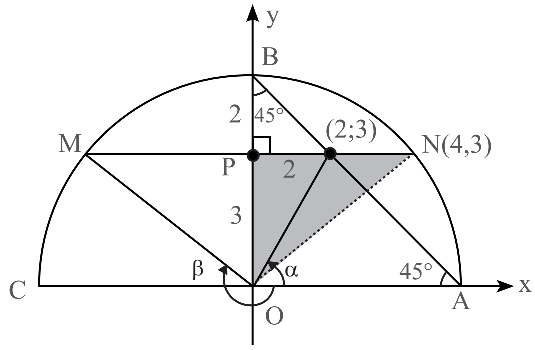
E) $\frac{2}{3}$

Resolución 36

R.T. de triángulos de cualquier medida



$$\boxed{\text{Cot}\beta=\frac{-4}{3}}$$



$NO=\sqrt{4^2+3^2}$

$NO=5\rightarrow NO=OB\rightarrow \boxed{PB=2}$

$$\boxed{\text{Cot}=\frac{2}{3}}$$

Piden: $\boxed{\text{Cot}\alpha+\text{Cot}\beta=\frac{-2}{3}}$

Rpta.: $\frac{-2}{3}$

Pregunta 37

Indique el valor de veracidad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:

I. Sea $f(x)=\text{arcsen}(x)-\text{arcsen}(\sqrt{x})\rightarrow f(x)\le 0,\ \forall\ x\in \text{Domf}$

II. Si $0<x<1\rightarrow \text{arcsen}(x)>\sqrt{x}$

III. Si $0<x<1\rightarrow \sqrt{\text{arcsen}(x)}+\sqrt{\text{arcos}(x)}\le\sqrt{\pi}$

A) FVV

B) FFV

C) VFF

D) VFV

E) VVV

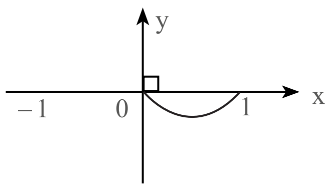
Resolución 37

Funciones Trigonométricas Inversas

I. Graficando la función

$f(x)=\text{arcsen}(x)-\text{arcsen}(\sqrt{x})$

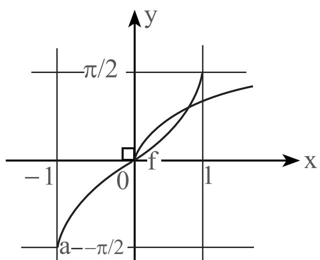
Domf: $x\in[0;1]$



(Verdadero)

II. Graficando la función

Si $0<x<1$ $\text{arcsen}(x)>\sqrt{x}$



(Falso)

III. $0 \quad x \quad 1 \Longrightarrow \begin{cases} \text{arcsen}(x) \quad 0 \\ \text{arccos}(x) \quad 0 \end{cases}$

Recordamos: Media potencial ≥ Media Aritmética

$$\frac{\sqrt{\text{arcsen}(x)}^2 + \sqrt{\text{arccos}(x)}^2}{2} \geq \left(\frac{\sqrt{\text{arcsen}(x)} + \sqrt{\text{arccos}(x)}}{2}\right)^2$$

$$\frac{\pi}{\cancel{4}} \geq \frac{(\sqrt{\text{arccsen}(x)} + \sqrt{\text{arccos}(x)})^2}{\cancel{4}}$$

$$\therefore \ \sqrt{\text{arcsen}(x)} + \sqrt{\text{arccos}(x)} \leq \sqrt{\pi}$$

(Verdadero)

Rpta.: VFV

Pregunta 38

Calcule el periodo mínimo de la función f definida por

$f(x) = |\cos(x)| + |\text{sen}(x)|$

A) $\frac{\pi}{4}$

B) $\frac{\pi}{2}$

C) π

D) $\frac{3\pi}{2}$

E) 2π

Resolución 38

Funciones Trigonométricas

Si: $f(x) = |\cos x| + |\text{sen} x|$

Por definición

$f(x+T) = |\cos(x+T)| + |\text{sen}(x+T)|$

Si: $T = \frac{\pi}{2}$

$$f(x+T) = \left|\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| + \left|\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right|$$

$f(x+T) = |-\text{sen} x| + |\cos x|$

$f(x+T) = |\text{sen} x| + |\cos x|$

$f(x+T) = f(x)$

$\therefore \ T = \frac{\pi}{2}$

Rpta.: $\frac{\pi}{2}$

Pregunta 39

Sea ABC un triángulo rectángulo (recto en B). Sean M y N puntos en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente de modo que el cuadrilátero AMNC es bicéntrico. Si AC = 6 m y MN = 1 m, calcule el área (en m^2) de la región cuadrangular AMNC.

A) 7,2

B) 8,4

C) 9,6

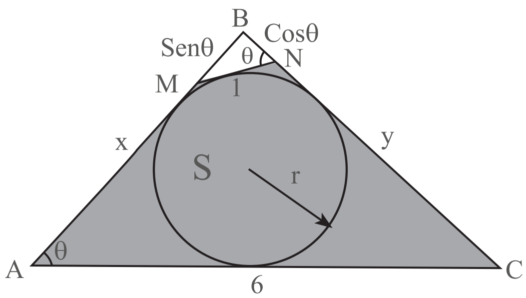
D) 7,8

E) 6,4

Resolución 39

Resolución de Triángulos

Piden el área de la región cuadrangular AMNC: S



$\boxed{S = p \, . \, r}$ ..... (1)

- El cuadrilátero AMNC es bicéntrico entonces: x+y = 7
- Del gráfico:
  $x = 6\text{Cos}\theta - \text{Sen}\theta$
  $y = 6\text{Sen}\theta - \text{Cos}\theta$ $\Rightarrow \boxed{\text{Cos}\theta + \text{Sen}\theta = \frac{7}{5}}$ .... (2)
- $P = \frac{x+y+6+1}{2} \rightarrow \boxed{p = 7}$
- Por el teorema de Poncelet: $6+2r = 6\text{Cos}\theta + 6\text{Sen}\theta$
  $\boxed{r = 3(\text{Cos}\theta + \text{Sen}\theta - 1)}$ Reemplazando (2)
  $\rightarrow \boxed{r = \frac{5}{6}}$
- Calculando el área: $S = 7.\frac{6}{5} \rightarrow \boxed{S = 8{,}4}$

Rpta.: 8,4

Pregunta 40

Siendo $a = \text{arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

Resuelva la siguiente ecuación en términos de a, ∀ n ∈ Z.

$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = 3\text{sen}(x)$

A) $\{2n\pi\} \cup \{2n \pm a\}$

B) $\{n\pi\} \cup \{2n\pi \pm 2a\}$

C) $\{2n\pi\} \cup \{2n\pi \pm 2a\}$

D) $\{2n\pi\}$

E) $\{2n\pi \pm a\}$

Resolución 40

Ecuaciones Trigonométricas

Del dato: $\alpha = \text{arcCos}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

$\text{Cos}\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}} \longrightarrow \text{Cos}2\alpha = -\frac{2}{3} \rightarrow$

De la ecuación: $\boxed{2\alpha = \text{arcCos}\left(\frac{-2}{3}\right)}$

$\frac{\cancel{\text{Sen}\left(\frac{x}{2}\right)}}{\text{Cos}\left(\frac{x}{2}\right)} = 3\left(2\cancel{\text{Sen}\frac{x}{2}}.\text{Cos}\frac{x}{2}\right)$

$\rightarrow \text{Sen}\frac{x}{2} = 0 \ \vee \ 2\text{Cos}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{3}$

$\frac{x}{2} = n\pi \ \vee \ \text{Cos}x = \frac{-2}{3}$

$x = 2n\pi \vee \ x = 2n\pi \pm \text{arcCos}\left(\frac{-2}{3}\right)$

$x = 2n\pi \vee \ x = 2n\pi \pm 2\alpha$

$\therefore \boxed{CS = \{2n\pi\} \cup \{2n\pi \pm 2a\}}$

Rpta.: $\{2n\pi\} \cup \{2n\pi \pm 2a\}$